

2.2 均值定理

有话要说：说白了，最重要就是这两条公式，背下来就行，均值定理近十年才考过一次，大概做些简单练习题就行了

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad a, b > 0, a = b \text{ 时相等}$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad a, b > 0, a = b \text{ 时相等}$$

2.1 均值定理：算术与几何的较量

官方版

对于任意两个正数 a 和 b (即 $a > 0, b > 0$)，它们的算术平均值（也就是加起来除以 2）总是大于或等于它们的几何平均值（也就是乘起来再开平方）。数学上，这可以用以下不等式表达：

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

特别地，只有当 $a = b$ 时，等号才会成立。这揭示了一个有趣的事：平均值之间的差距在两个数相等时达到最小。

2.2 均值定理的变身技巧

2.2.1 变形一：翻倍的秘密

官方版

由基本均值定理稍作变换，可得：

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

其中 $a, b > 0$ 。这个式子表明，两数之和总是至少是它们几何平均值的两倍，且仅当 $a = b$ 时等号成立。

2.2.2 变形二：平方大作战

官方版

另一个有趣的变形是：

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

这表示，两数的乘积永远不会超过它们算术平均值的平方，且仅在 $a = b$ 时相等。

2.3 用均值定理玩转最值

2.3.1 求最小值：和的最小化

官方版

假设 a 和 b 是正数，且它们的乘积 ab 是一个固定值 k （即 $ab = k$ ）。根据均值定理， $a + b$ 的最小值出现在 $a = b$ 时，此时：

$$a + b \geq 2\sqrt{k}$$

等号仅在 $a = b = \sqrt{k}$ 时成立。

2.3.2 求最大值：乘积的巅峰

官方版

假设 a 和 b 是正数，且它们的和 $a + b$ 是一个固定值 s （即 $a + b = s$ ）。根据均值定理， ab 的最大值出现在 $a = b$ 时，此时：

$$ab \leq \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

等号仅在 $a = b = \frac{s}{2}$ 时成立。

小贴士

记住这仨条件：① 正数 ($a, b > 0$)；② 一个固定 (和或积)；③ 平等最优 ($a = b$)。缺一个都不灵！

2.4 必备不等式锦囊

2.4.1 不等式一：平方永不负

官方版

对于任意实数 a 和 b ，有：

$$(a + b)^2 \geq 0$$

这显然成立，因为平方总是非负的。

2.4.2 不等式二：平方和的较量

官方版

对于任意实数 a 和 b ，有：

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

仅当 $a = b$ 时等号成立。这个不等式可以通过展开 $(a - b)^2 \geq 0$ 推导。

知识点总结表格

知识点	核心公式	关键条件	人话精髓
基本均值定理	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a, b > 0, a = b$ 时相等	平均比勾肩搭背强，相
变形一： 和的下限	$a + b \geq 2\sqrt{ab}$	$a, b > 0, a = b$ 时相等	攒钱至少两倍利润，平
变形二： 乘积上限	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a, b > 0, a = b$ 时相等	成果超不过吹牛，除非
最小值： 固定乘积	$a + b \geq 2\sqrt{k}$	$ab = k, a = b$ 时最小	平分干活最少，不然白
最大值： 固定和	$ab \leq \left(\frac{s}{2}\right)^2$	$a + b = s, a = b$ 时最大	平分力气成果大，不然
不等式： 平方非负	$(a + b)^2 \geq 0$	任意实数 a, b	平方咋可能负？别问，
不等式： 平方和	$a^2 + b^2 \geq 2ab$	任意实数 $a, b, a = b$ 时相等	单干比合伙强，相等才

〔2.2 练习

〔2.2 练习带答案版

〔2.2 答案