2.4 一元二次方程和一元二次不等式

2.4.1.1 一元二次方程的定义 (Definition of Quadratic Equations)

详细官方版

形如

$ax^2 + bx + c = 0$

的方程，其中 a, b, c 是常数，$a \neq 0$，且方程中只含有一个未知数 x，并且未知数的最高次数是 2，这样的方程叫做**一元二次方程**。

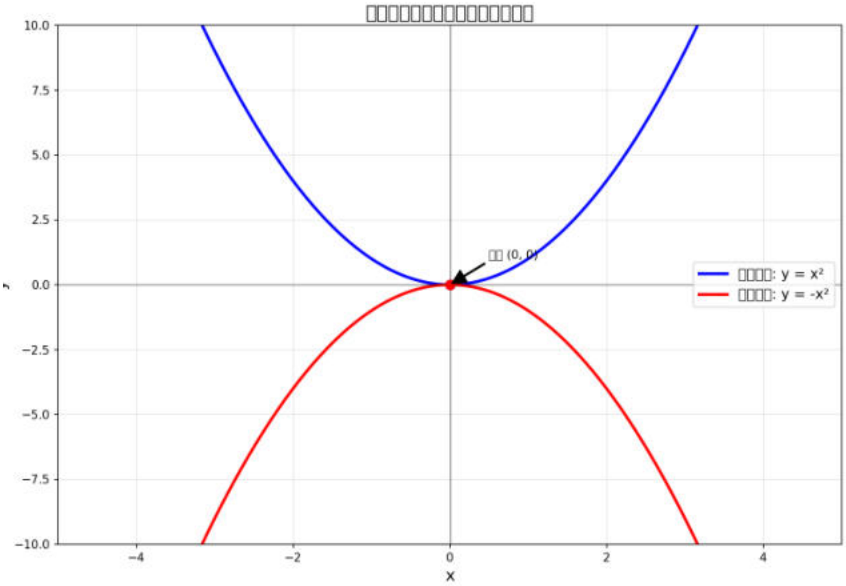
- a 称为**二次项系数**，
- b 称为**一次项系数**，
- c 称为**常数项**。

人话版

简单来说，一元二次方程就是长成这个样子的等式：一个数字乘以 x 的平方，加上另一个数字乘以 x，再加上一个单独的数字，最后等于零。记住，最重要的条件是 x^2 前面的数字（也就是 a）不能是零，不然它就变成一元一次方程啦！

举例

1. $2x^2 + 3x - 5 = 0$ （这里 $a = 2, b = 3, c = -5$）
2. $x^2 - 9 = 0$ （这里 $a = 1, b = 0, c = -9$）
3. $-3x^2 + x = 0$ （这里 $a = -3, b = 1, c = 0$）



2.4.1.2 一元二次方程的解法 (Solving Quadratic Equations)

解一元二次方程就是找到所有能使方程等式成立的 x 的值，这些值称为方程的**根**或**解**。常见的方法有以下几种：

方法一：直接开平方法 (Direct Square Root Method)

详细官方版

适用于形如 $(x+m)^2=n$（$n\geq 0$）或 $ax^2=c$（$ac\geq 0$）的特殊形式的一元二次方程。通过将方程变形为平方等于常数的形式，然后两边开平方求解。

人话版

这种方法就像是“反过来”做平方运算。如果你的方程长得特别简单，就像某个东西的平方等于一个数字（这个数字还不能是负数哦），那我们就可以直接把平方去掉，然后记得在另一边加上正负根号，就能找到 x 的值啦！

举例

1. **解方程：** $x^2=9$
   - 官方版：两边开平方，得 $x=\pm\sqrt{9}$，所以 $x_1=3, x_2=-3$。
   - 人话版：什么数的平方是 9 呢？当然是 3 和 –3 啦！
2. **解方程：** $(x-1)^2=4$
   - 官方版：两边开平方，得 $x-1=\pm\sqrt{4}$，即 $x-1=2$ 或 $x-1=-2$。解得 $x_1=3, x_2=-1$。
   - 人话版：哪个数减 1 的平方是 4 呢？可以是 2 或者 –2。所以 x 可以是 3（因为 $3-1=2$）或者是 –1（因为 $-1-1=-2$）。

方法二：因式分解法 (Factoring Method)

详细官方版

利用因式分解将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 转化为 $(mx+n)(px+q)=0$ 的形式，然后根据“若两个因子的乘积为零，则至少有一个因子为零”的原理，得到 $mx+n=0$ 或 $px+q=0$，从而解出 x 的值。常用的因式分解方法包括提取公因式、公式法（平方差公式、完全平方公式等）、十字相乘法等。

人话版

这种方法就像玩积木，把一个复杂的式子拆成两个（或更多）简单的式子相乘，如果最后结果是零，那说明这些简单的式子里至少有一个是零。我们只需要让每个简单的式子都等于零，就能找到 x 的值啦！

举例

1. **解方程：** $x^2+5x+6=0$
   - 官方版：将左边因式分解为 $(x+2)(x+3)=0$。所以，$x+2=0$ 或 $x+3=0$，解得 $x_1=-2, x_2=-3$。
   - 人话版：想想看，哪两个数加起来是 5，乘起来是 6 呢？是 2 和 3 对不对？所以这个方程可以变成 $(x+2)$ 乘以 $(x+3)$ 等于 0。那么，x 只要等于 –2 或者 –3，这个等式就成立啦！
2. **解方程：** $x^2-4=0$
   - 官方版：利用平方差公式，分解为 $(x-2)(x+2)=0$。所以，$x-2=0$ 或 $x+2=0$，解得 $x_1=2, x_2=-2$。
   - 人话版：这看起来像两个数的平方相减，我们可以把它变成这两个数相减再乘以这两个数相加。所以 $(x-2)$ 乘以 $(x+2)$ 等于 0。这样 x 等于 2 或者 –2 都可以。

方法三：配方法 (Completing the Square)

详细官方版

通过恒等变形，将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）转化为 $(x+m)^2=n$（$n\geq 0$）的形式，然后利用直接开平方法求解。配方法的关键在于将二次项和一次项配成一个完全平方式。

人话版

这个方法稍微有点技巧性，我们要做的就是把方程变成一个“完全平方”的形式，就像 $(x+\text{某个数})^2$ 这样。怎么变呢？我们需要在方程的两边都加上一个特定的数，让左边变成一个完全平方，然后就可以用我们之前学过的直接开平方法来解决了。

步骤

1. 如果二次项系数不是 1，先把方程两边都除以二次项系数 a。
2. 把常数项移到方程的右边。
3. 在方程的两边都加上一次项系数一半的平方，也就是 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$。
4. 这样，方程的左边就变成了一个完全平方的形式 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$，右边是一个常数。
5. 最后，用直接开平方法求解。

举例

解方程： $x^2+6x-7=0$

- **官方版**
  1. 二次项系数是 1，不用除。
  2. 移项： $x^2+6x=7$ 。
  3. 一次项系数是 6，一半是 3，平方是 9。两边都加 9： $x^2+6x+9=7+9$ ，即 $(x+3)^2=16$ 。
  4. 两边开平方： $x+3=\pm\sqrt{16}=\pm4$ 。
  5. 所以， $x_1=-3+4=1$ ， $x_2=-3-4=-7$ 。
- **人话版**
  1. x^2 前面已经是 1 了，很好！
  2. 把 –7 搬到等号的右边： $x^2+6x=7$ 。
  3. 现在看看 x 前面的数字是 6，一半是 3，3 的平方是 9。我们在等号两边都加上 9： $x^2+6x+9=7+9$ 。
  4. 左边 x^2+6x+9 正好可以写成 $(x+3)$ 的平方，右边是 16。所以我们有 $(x+3)^2=16$ 。
  5. 哪个数的平方是 16 呢？是 4 和 –4。所以 $x+3$ 可以等于 4，也可以等于 –4。这样我们就得到 $x=1$ 或者 $x=-7$ 。

方法四：公式法 (Quadratic Formula)

详细官方版

对于一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），它的根由以下公式给出：

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

其中， $\Delta=b^2-4ac$ 称为**判别式**。

- 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
- 当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
- 当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根（在实数范围内）。

人话版

这个公式就像一个“万能钥匙”，不管你的方程长得多奇怪，只要是符合一元二次方程的样子（$ax^2+bx+c=0$ 并且 a 不是 0），我们都可以直接把 a,b,c 这三个数字代到这个公式里，就能算出 x 的值啦！公式里的 b^2-4ac 这部分很重要，它决定了我们有多少个答案（或者说有没有实数答案）。

举例

解方程： $2x^2+3x-5=0$

- **官方版**

  这里 $a=2, b=3, c=-5$ 。

  判别式 $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(2)(-5)=9+40=49>0$ 。所以有两个不相等的实数根。

  $x=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{-3\pm7}{4}$ 。

  $x_1=\frac{-3+7}{4}=\frac{4}{4}=1$ ，

  $x_2=\frac{-3-7}{4}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$ 。

- **人话版**

  1. 先找到 $a=2, b=3, c=-5$ 。
  2. 算一下 b^2-4ac 里面的东西： $3^2-4\times2\times(-5)=9+40=49$ 。因为 49 是正数，所以我们会有两个不同的答案。
  3. 把这些数字代到公式里： $x=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{-3\pm7}{4}$ 。
  4. 所以，一个答案是 $\frac{-3+7}{4}=1$ ，另一个答案是 $\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2}$ 。

2.4.1.3 根的判别式 (Discriminant)

详细官方版

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），其根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号决定了方程根的情况：

- 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根。
- 当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根。
- 当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根。

人话版

判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 就像一个“侦探”，它能告诉我们一元二次方程有多少个（实数）解，以及这些解是否一样。

- 如果 Δ 是个正数（大于 0），那么方程有两个不同的实数答案。
- 如果 Δ 正好是 0，那么方程有两个一样的实数答案（我们通常说它有一个实数解，但它是重根）。
- 如果 Δ 是个负数（小于 0），那么方程在实数范围内就没有答案了。（以后我们会学到复数，那时候就有答案啦！）

2.4.1.4 根与系数的关系 (Vieta's Formulas)

详细官方版

如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根，那么它们与方程的系数之间存在如下关系（**韦达定理**）：

- $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

人话版

韦达定理告诉我们，方程的两个根加起来等于 $-\frac{b}{a}$ ，两个根乘起来等于 $\frac{c}{a}$ 。这个关系很有用，可以在不知道具体根的情况下，求出根的和或者积，或者反过来，根据根的和与积来构造一元二次方程。

举例

方程 $2x^2+3x-5=0$ 的两个根是 $x_1=1$ ， $x_2=-\frac{5}{2}$ （我们前面已经解出来了）。

- 根的和： $x_1+x_2=1+\left(-\frac{5}{2}\right)=1-2.5=-1.5$ 。根据公式， $-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}=-1.5$ 。两者相等。

- 根的积： $x_1 \cdot x_2=1\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ 。根据公式， $\frac{c}{a}=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$ 。两者相等。

2.4.2 一元二次不等式 (Quadratic Inequalities in One Variable)

2.4.2.1 一元二次不等式的定义 (Definition of Quadratic Inequalities)

详细官方版

形如

$ax^2+bx+c>0$ （或 $<0, \geq 0, \leq 0$ ）

的不等式，其中 a,b,c 是常数， $a \neq 0$ ，且不等式中只含有一个未知数 x ，并且未知数的最高次数是2，这样的不等式叫做**一元二次不等式**。

人话版

一元二次不等式和一元二次方程很像，只是把等号换成了大于号、小于号、大于等于号或者小于等于号。我们的目标是找到所有能让这个不等式成立的 x 的范围。

举例

1. $x^2-x-2>0$
2. $-2x^2+5x\leq 3$
3. $3x^2-6<0$

2.4.2.2 一元二次不等式的解法 (Solving Quadratic Inequalities)

解一元二次不等式通常有两种主要方法：**图像法**和**代数法**。

方法一：图像法 (Graphical Method)

详细官方版

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的交点以及开口方向来确定不等式的解集。

1. 求出对应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根。

2. 根据 a 的符号判断二次函数图像的开口方向（$a > 0$ 时开口向上，$a < 0$ 时开口向下）。
3. 根据根的情况画出二次函数的草图，标出与 x 轴的交点。
4. 根据不等号的方向，确定函数图像在 x 轴上方或下方对应的 x 的取值范围。

人话版

我们可以把一元二次不等式看成是问：什么时候二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的值大于（或小于）零？也就是问这个函数的图像在哪一部分位于 x 轴的上方（或下方）？

1. 首先，我们要找到这个二次函数和 x 轴的交点，也就是解对应的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 。
2. 然后，看看 x^2 前面的数字 a 是正的还是负的。如果 a 是正的，图像就像一个“微笑”的抛物线，开口向上；如果 a 是负的，图像就像一个“哭泣”的抛物线，开口向下。
3. 根据交点和开口方向，画个草图。
4. 最后，看题目要求是大于零还是小于零。如果大于零，就找图像在 x 轴上方的 x 的范围；如果小于零，就找图像在 x 轴下方的 x 的范围。

举例

解不等式： $x^2 - x - 2 > 0$

1. 解方程 $x^2 - x - 2 = 0$ ，因式分解得 $(x-2)(x+1) = 0$ ，所以根是 $x_1 = 2, x_2 = -1$ 。
2. 二次项系数 $a = 1 > 0$ ，所以抛物线开口向上。
3. 画出草图，抛物线与 x 轴交于 $(-1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 。
4. 不等式要求 $y = x^2 - x - 2 > 0$ ，也就是找图像在 x 轴上方的部分，对应的 x 的范围是 $x < -1$ 或 $x > 2$ 。

方法二：代数法 (Algebraic Method)

详细官方版

1. 将一元二次不等式化为标准形式 $ax^2 + bx + c > 0$ （或 $< 0, \geq 0, \leq 0$ ）。
2. 解对应的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，求出根 x_1, x_2（$x_1 \leq x_2$）。
3. 根据根和 a 的符号，利用“同号两边，异号中间”的原则确定不等式的解集。
   - **当** $a > 0$ **时**：
     - 若 $\Delta > 0$ ，则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$ ，

       $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$ 。

    - 若 $\Delta = 0$，则 $ax^2+bx+c>0$（$x \neq x_1$）的解集为 $\{x \mid x \neq x_1\}$，

      $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集。
    - 若 $\Delta < 0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbb{R}$（全体实数），

      $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集。
- **当 $a<0$ 时**：可以将不等式两边同乘以 –1，改变不等号方向，转化为 $a'x^2+b'x+c'<0$（或 $>0, \leq 0, \geq 0$）（$a'>0$）的情况求解。

人话版

这个方法有点像“画数轴，看方向”。

1. 先把不等式整理成一边是 ax^2+bx+c，另一边是 0 的形式。
2. 解出对应的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根（如果没有实数根，就跳过这一步）。
3. 把这些根标在数轴上，数轴就被分成了几个区间。
4. 看看 x^2 前面的数字 a 是正的还是负的。
    - 如果 a 是正的（开口向上），那么在两个根的外面（两边）的 x 值会让 $ax^2+bx+c>0$，在两个根的中间的 x 值会让 $ax^2+bx+c<0$。
    - 如果 a 是负的（开口向下），情况就正好相反：在两个根的外面 $ax^2+bx+c<0$，在两个根的中间 $ax^2+bx+c>0$。
5. 如果方程只有一个根（判别式等于 0），或者没有实数根（判别式小于 0），情况会稍微特殊一些，需要结合 a 的符号来判断。
6. 记住口诀：**大于零，取两边；小于零，取中间**。（适用于 $a>0$ 的情况，如果 $a<0$，可以先乘以 –1 改变不等号方向）

举例

1. **解不等式：** $x^2-x-2>0$
    - 已经化为标准形式。
    - 方程 $x^2-x-2=0$ 的根是 $x_1=-1, x_2=2$。
    - $a=1>0$。不等号是 >0，所以取两边：$x<-1$ 或 $x>2$。
    - 解集为 $\{x \mid x<-1 \text{ 或 } x>2\}$。
2. **解不等式：** $-x^2+x+6 \geq 0$
    - 解方程 $-x^2+x+6=0$，即 $x^2-x-6=0$，因式分解得 $(x-3)(x+2)=0$，所以根是 $x_1=-2, x_2=3$。
    - 这里 $a=-1<0$。不等号是 ≥ 0，我们可以先乘以 –1，变成 $x^2-x-6 \leq 0$（$a'=1>0$）。小于等于零，取中间，包括端点：$-2 \leq x \leq 3$。
    - 解集为 $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$。

2.4.3 一元二次方程与一元二次不等式的联系

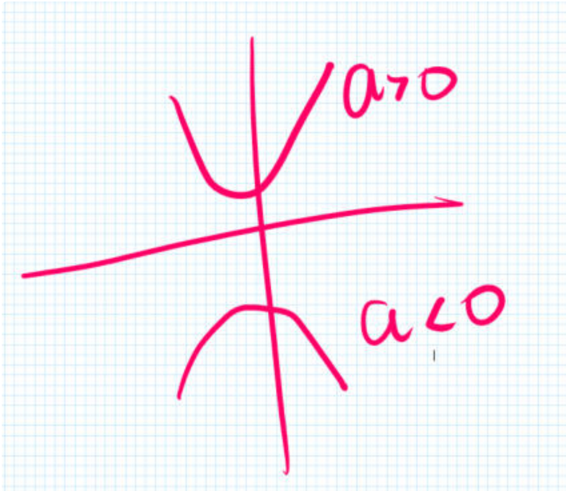
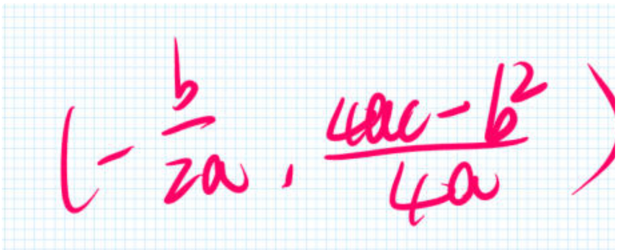
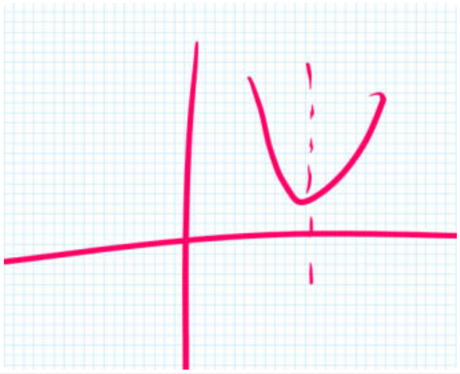
详细官方版

一元二次方程和一元二次不等式密切相关。解一元二次不等式的关键在于找到对应的一元二次方程的根，这些根是二次函数图像与 x 轴的交点，它们将 x 轴分成若干个区间。在每个区间内，二次函数值的符号是确定的，通过判断这些符号，我们可以确定不等式的解集。

人话版

一元二次方程就像是解一元二次不等式的“地标”。我们先找到方程的解，这些解就像数轴上的“分割点”，把数轴分成几段。然后我们只需要看看在每一段里，二次式是大于零还是小于零，就能找到不等式的答案了。方程的根就是不等式解集的边界。

一元二次函数与一元二次不等式知识点汇总

知识点	解释	公式/描述
一元二次函数定义	只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式函数	一般形式为 $f(x) = ax^2 + bx + c$，其中 a 、 b 、
一元二次函数图像	抛物线	开口方向由 a 决定， $a > 0$ 时开口向上， $a < 0$ 时 
顶点坐标	抛物线的顶点是其最高点或最低点	顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ 
对称轴	抛物线的对称轴是一条直线	对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 
判别式	用于判断方程根的情况	$\Delta = b^2 - 4ac$
根的情况	根据判别式判断	$\Delta > 0$ 时，有两个不相等的实根（交点）； $\Delta = 0$ 根（交点）； $\Delta < 0$ 时，无实根（交点）
求根公式	当 $\Delta \geq 0$ 时，方程的根为	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
韦达定理	方程的根与系数的关系	若根为 x_1 、 x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
单调性	函数的增减性	当 $a > 0$ 时，函数在对称轴左侧递减，右侧递增；当 对称轴左侧递增，右侧递减
最值	函数的最大值或最小值	当 $a > 0$ 时，函数在顶点处取得最小值；当 $a < 0$ 时

		得最大值
一元二次不等式定义	含有一个未知数且未知数最高次数为 2 的不等式	一般形式为 $ax^2+bx+c>0$（或 ≥ 0、<0、
一元二次不等式解法步骤	求解一元二次不等式的一般步骤	1. 将不等式化为标准形式；2. 计算判别式 Δ；3. 求程的根（若存在)；4. 根据抛物线的开口方向和根的解集

2.4 练习

2.4 练习带答案

2.4 答案