3.2 函数定义域

3.2 定义域练习

3.2 练习带答案版

3.2 答案

3.2 各种函数的定义域（x 的范围）

欢迎来到函数定义域的奇妙世界！定义域是函数的“生存范围”，也就是输入值（自变量 x ）可以取值的集合。简单来说，就是“ x 能活在哪里”。今天我们将探索常见函数的定义域，带你一步步解锁它们的秘密！

一、常数函数的定义域（看不懂不用管）

知识点详解

常数函数的形式是 $f(x) = c$ ，其中 c 是一个固定的数（比如 $f(x) = 5$ ）。这种函数无论 x 取什么值，输出永远是 c 。

- **定义域**：由于 x 可以是任意实数，没有任何限制，所以定义域是 **全体实数**，记作 $(-\infty, +\infty)$ 。

人话版

“常数函数就像一个超级随和的朋友，不管你扔给它什么 x ，它都淡定地回你一个 c ，完全没脾气！所以它的地盘就是整个实数线，想去哪儿就去哪儿。”

二、幂函数的定义域

知识点详解

幂函数的形式是 $f(x) = x^n$ ，其中 n 是常数。我们分情况讨论：

1. n **为正整数（如** $f(x) = x^2$ **）**：无论 x 取什么实数， x^n 都有意义，所以定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。
2. n **为负整数（如** $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ **）**：这时 x 不能为 0，否则分母为 0，函数无意义。所以定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。
3. n **为 0**：这时 x 不能为 0，否则分母为 0，函数无意义。!!!

4. n **为分数（如 $f(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}$）**：若 $n=\frac{p}{q}$ （q 为奇数或偶数），x^q 在实数范围内要保证有意义。当 q 为偶数时，$x \geq 0$；当 q 为奇数时，x 可以是任意实数。例如：

   - $f(x)=\sqrt{x}$，定义域是 $[0,+\infty)$。
   - $f(x)=x^{1/3}$，定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} \Rightarrow a \geq 0$$

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^1} \Rightarrow a \in R$$

人话版

“幂函数就像一个挑食的家伙。n 是正整数时，它啥都吃，地盘无限大。n 是负数时，它讨厌 $x=0$，说‘分母不能为零，走开！’。n 是分数时，它会看看底下的 q 是奇是偶，偶数时它只接受正数朋友，奇数时就来者不拒。”

三、分式函数的定义域

知识点详解

分式函数的形式是 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$，其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是多项式。

- **定义域**：**分母 $h(x)$ 不能为 0**，因此定义域是使 $h(x) \neq 0$ 的所有 x 的集合。
- **举例**：
  - $f(x)=\frac{1}{x-2}$，解 $x-2 \neq 0$，得 $x \neq 2$，定义域是 $(-\infty,2) \cup (2,+\infty)$。
  - $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$，因为 $x^2+1 \geq 1$，永远不为 0，所以定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

人话版

“分式函数就像一个爱挑刺的小孩，分母要是 0，它就炸毛大喊‘不行！’。所以得先把分母弄明白，哪儿不能去就划掉，剩下的就是它的地盘。”

四、根式函数的定义域

知识点详解

根式函数涉及平方根或更高次根，如 $f(x) = \sqrt{g(x)}$ 。

- **定义域**：在实数范围内， $g(x)$ 必须 ≥ 0 （因为负数开偶次方根无实数解）。所以定义域是使 $g(x) \geq 0$ 的 x 的集合。
- **举例**：
  - $f(x) = \sqrt{x+3}$ ，要求 $x+3 \geq 0$ ，解得 $x \geq -3$ ，定义域是 $[-3, +\infty)$ 。
  - $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ，要求 $4-x^2 \geq 0$ ，解得 $-2 \leq x \leq 2$ ，定义域是 $[-2, 2]$ 。

人话版

“根式函数像个胆小的冒险家，只敢去安全的地方。被开平方根的部分得是正数或 0，不然它就吓得不敢动了。赶紧算算哪儿安全，它就住那儿！”

五、对数函数的定义域

知识点详解

对数函数的形式是 $f(x) = \log_a(x)$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

- **定义域**：对数的真数 x 必须 > 0 ，因此定义域是使 $x > 0$ 的 x 的集合。
- **举例**：
  - $f(x) = \ln(x)$ ，要求 $x > 0$ ，定义域是 $(0, +\infty)$ 。
  - $f(x) = \log_2(x^2+1)$ ，因为 $x^2+1 > 0$ 恒成立，定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

人话版

“对数函数是个严格的家伙，它要求底下的 $g(x)$ 必须是正数，不然就摆脸色说‘我算不下去！’。所以得先把 $g(x) > 0$ 的地盘找出来，它才肯工作。”

六、指数函数的定义域

知识点详解

指数函数的形式是 $f(x) = a^x$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

- **定义域**：在实数范围内，指数函数对任意 x 都有意义，因此定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

- **举例**：
  - $f(x) = 2^x$，定义域是 $(-\infty, +\infty)$。
  - $f(x) = e^{x^2}$，因为 $x^2 \geq 0$，e 的任意值都有意义，定义域仍是 $(-\infty, +\infty)$。

人话版

“指数函数是个超级开朗的大佬，不管 x 扔过来啥，它都能笑着接住，‘没问题，哥都能算！’所以它的地盘就是整个实数世界。”

知识点总结表格

函数类型	示例	定义域	限制条件
常数函数	$f(x) = 5$	$(-\infty, +\infty)$	无限制
幂函数	$f(x) = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	n 为正整数时无限制
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$x \neq 0$（n 为负整数）
	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$x \geq 0$（n 为分数，q 偶）
分式函数	$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	分母 $\neq 0$
根式函数	$f(x) = \sqrt{x+3}$	$[-3, +\infty)$	被开方数 ≥ 0
对数函数	$f(x) = \ln(x)$	$(0, +\infty)$	真数 > 0
指数函数	$f(x) = 2^x$	$(-\infty, +\infty)$	无限制
