3.3 函数的单调性

欢迎来到函数单调性的奇妙世界！单调性是函数的一个重要性质，它能告诉我们函数的值是如何随着自变量的变化而“起起落落”的。简单来说，就是函数是向上爬坡，还是向下溜滑梯，或者干脆耍赖不走单行道。我们将从定义入手，逐步拆解增函数、减函数、单调区间，再聊聊常见函数的单调性，最后教你如何判断一个函数的单调性。准备好了吗？Let’s go!

3.3 单调性的核心概念

1. 增函数（x 越大，y 就越大）

官方版解释

假设有一个函数 $y = f(x)$，它在一个区间，比如 (a, b) 内是“活蹦乱跳”的（也就是在这个区间内都有定义）。如果在这个区间里，任意挑两个数 x_1 和 x_2，只要 $x_1 < x_2$，就一定有 $f(x_1) < f(x_2)$，那这个函数就被称为 **增函数**。这个区间 (a, b) 就是它的 **增区间**。

换句话说，增函数就是那种“自变量变大，函数值也跟着变大”的老实家伙。

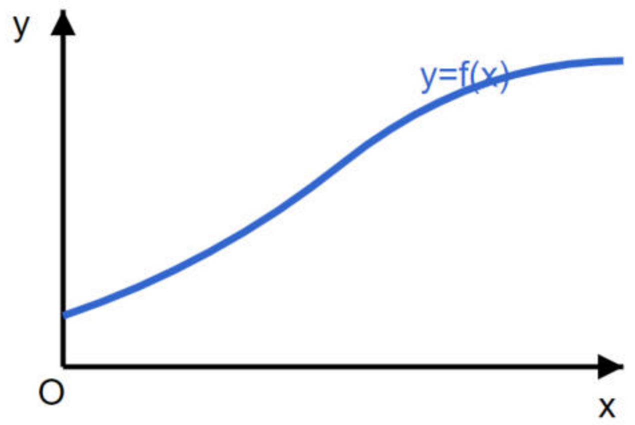
人话版解读

嘿，增函数就是那种特别听话的小弟！你让它往东，它绝不往西。想象你在爬山，x 是你的步数，$f(x)$ 是你的高度，步子迈得越大（x 越大），你爬得越高（$f(x)$ 越大）。它就是这么耿直，从不偷懒，也不会半路掉头往下跑。图啥？就图个“上升的人生”！

（如果需要画个“爬坡图”来说明，告诉我一声，我给你整一个！）

图示特征

增函数的图像看起来就像一条从左下角爬到右上角的曲线，或者干脆是一条斜向上的直线。总之，往右走，它就往上窜，绝不含糊。



2. 减函数（x 越大，y 就越小）

官方版解释

同样，假设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义。如果对于任意的 x_1 和 x_2，只要 $x_1 < x_2$，就一定有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么这个函数就被称为 **减函数**，区间 (a, b) 就是它的 **减区间**。

简而言之，减函数是那种“自变量变大，函数值反而变小”的倒挂选手。

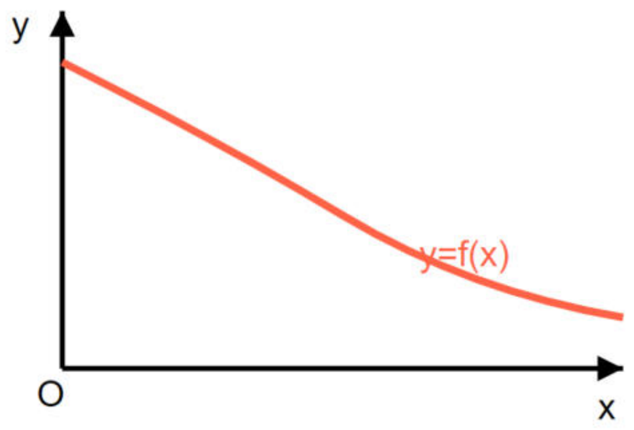
人话版解读

减函数这家伙，简直就是个叛逆少年！你让它往上走，它偏偏给你往下溜。想象你在坐滑梯，x 是时间，$f(x)$ 是你的位置，时间越长（x 越大），你就滑得越低（$f(x)$ 越小）。它就喜欢跟你对着干，气不气？但不得不说，这种“下降的美感”也挺带劲儿的！

（想看个“滑梯图”吗？喊我一声就行！）

图示特征

减函数的图像就像一条从左上角滑到右下角的曲线，或者一条斜向下的大道。总之，往右走，它就往下掉，绝不回头。



3. 单调区间（说白了就是单调递增或者单调递减的 x 范围）

官方版解释

如果一个函数在某个区间内，要么是增函数，要么是减函数，那我们就说它在这个区间上 **具有单调性**。这个区间就被称为 **单调区间**，具体分为 **单调递增区间**（增函数的地盘）和 **单调递减区间**（减函数的地盘）。

注意：单调性是针对特定区间的，同一个函数在不同区间可能表现完全不同。

人话版解读

单调区间就是函数的“舒适区”！在这片地盘上，它要么老老实实往上爬，要么痛痛快快往下溜，总之不搞乱七八糟的花样。就像你考试成绩，要么一直涨，要么一直跌，总比忽上忽下让人抓狂强吧？但别忘了，出了这个区间，它可能会翻脸不认人，开始胡闹！

3.2.2 常见函数的单调性大揭秘

函数家族里，各路英雄都有自己的单调性脾气。我们挑几个常见的，给你扒一扒它们的真面目！

1. 一次函数 $y = kx + b$ （$k \neq 0$）（正比例函数同样如此）

官方版

- 当 $k > 0$ 时，函数在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上是**增函数**。
- 当 $k < 0$ 时，函数在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上是**减函数**。

人话版

一次函数就是个直来直去的家伙，斜率 k 是它的灵魂。$k > 0$ 时，它像个积极向上的小青年，永远往上冲；$k < 0$ 时，它就跟个泄了气的皮球，一路往下滚。简单粗暴，不玩花样！

---

2. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ （$k \neq 0$）

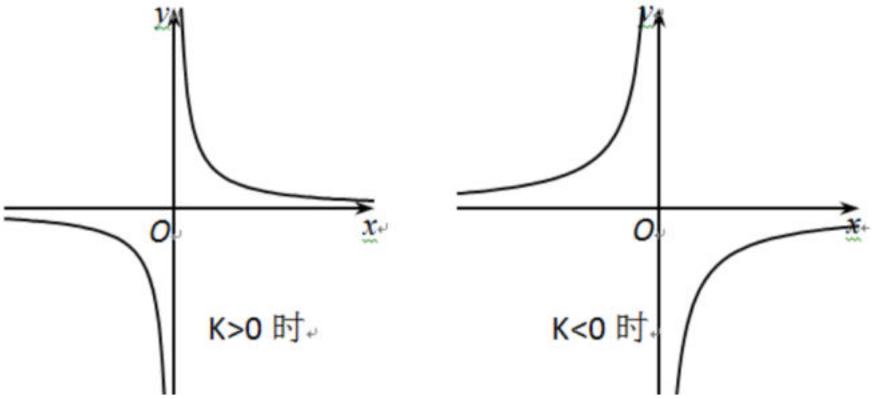
官方版

- 当 $k > 0$ 时，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是**减函数**。
- 当 $k < 0$ 时，在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是**增函数**。

人话版

反比例函数这货，脾气有点怪。因为有个 x 在分母，它被 0 劈成了两半，所以得看两块地盘。$k > 0$ 时，它像个傲娇鬼，x 变大它就变小，非要跟你对着干；$k < 0$ 时，它又翻身做主人，x 变大它也跟着

涨。总之，这家伙从不走寻常路！



3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）

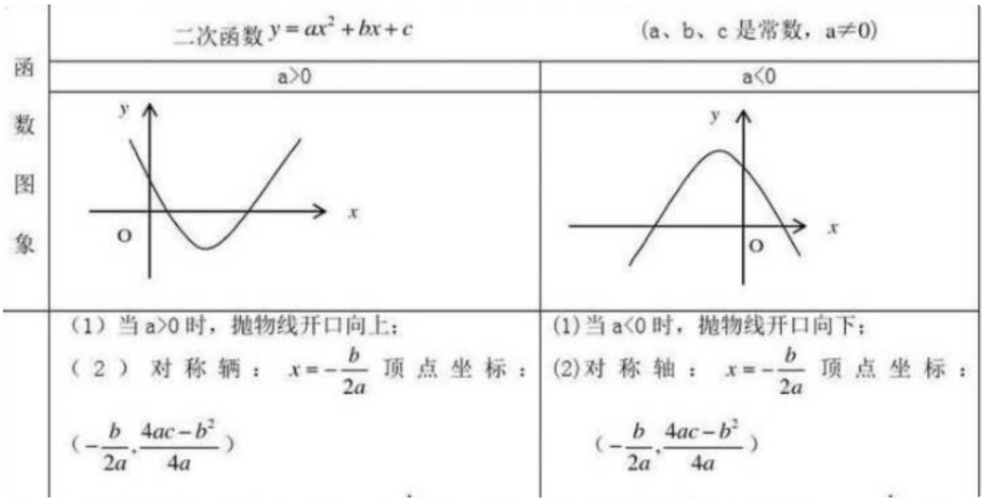
官方版

对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$ 。

- 当 $a>0$ 时，在 $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ 上是减函数，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上是增函数。
- 当 $a<0$ 时，在 $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ 上是增函数，在 $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上是减函数。

人话版

二次函数就是个戏精，永远围着对称轴转悠。$a>0$ 时，它像个笑脸，先滑到底然后爬起来；$a<0$ 时，它像个哭脸，先爬到顶再摔下去。总之，它从不一条道走到黑，总得找个点翻盘！



	二次函数 $y=ax^2+bx+c$	(a、b、c 是常数，a≠0)
函数图象	a>0	a<0
	y O x	y O x
	(1) 当 a>0 时，抛物线开口向上； (2) 对称辆：$x=-\frac{b}{2a}$ 顶点坐标： $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$	(1) 当 a<0 时，抛物线开口向下； (2) 对称轴：$x=-\frac{b}{2a}$ 顶点坐标： $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

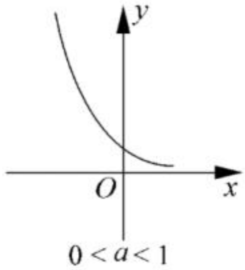
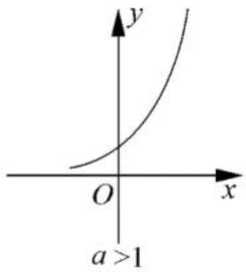
4. 指数函数 $y=a^x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

官方版

- 当 $a>1$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上是**增函数**。
- 当 $0<a<1$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上是**减函数**。

人话版

指数函数是个“看脸”的家伙，全看底数 a 的心情。$a>1$ 时，它像吃了兴奋剂，x 越大越嗨；$0<a<1$ 时，它就蔫了，x 越大越萎。总之，爆发力惊人，但方向得看 a 的脸色！

图像		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
性质	过定点$(0,1)$	
	非奇非偶	
	在 R 上是减函数	在 R 上是增函数

5. 对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

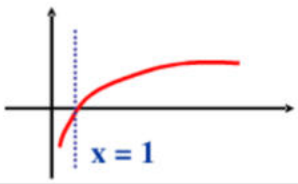
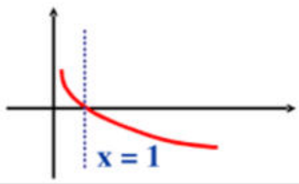
官方版

- 当 $a>1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上是**增函数**。
- 当 $0<a<1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上是**减函数**。

人话版

对数函数是指数函数的“反向兄弟”，底数 a 还是大佬。$a>1$ 时，它慢悠悠往上爬，像个慢性子；$0<a<1$ 时，它就往下溜，像个懒汉。总之，稳扎稳打，但绝不越界！

对数函数的性质

图象	$\log_a x$ **(a>1)**	$\log_a x$ **(0<a<1)**
		
观察图像	**定义域：** $(0,+\infty)$	**定义域：** $(0,+\infty)$
	图像必经过点： $(1,0)$	**图像必经过点：** $(1,0)$
	在 $(0,+\infty)$ **内是 增 函数（填“增”或“减”）**	**在** $(0,+\infty)$ **内是 减 函数（填“增”或“减”）**

3.2.3 如何判断函数的单调性

> 📌 易学长：**x 越大，y 越大为增函数，单调递增。x 越大，y 越小为减函数，单调递减。**

1.看图像，上升就是增函数，下降就是减函数。
2.x1<x2,对应的函数值大小符合如果不变的话，就是增函数，反之就是减函数。

知识点总结表格

知识点	定义/特征	例子	
增函数	x 增大，y 也增大，图像上升	$y = 2x + 1$	
减函数	x 增大，y 减小，图像下降	$y = -3x + 2$	
单调区间	函数在这区间内要么增要么减	$y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上增	
一次函数	$k > 0$ 增，$k < 0$ 减	$y = 3x - 1$	
反比例函数	$k > 0$ 减，$k < 0$ 增	$y = \frac{2}{x}$	
二次函数	$a > 0$ 先减后增，$a < 0$ 先增后减	$y = x^2$	
指数函数	$a > 1$ 增，$0 < a < 1$ 减	$y = 2^x$	
对数函数	$a > 1$ 增，$0 < a < 1$ 减	$y = \log_2 x$	

3.3练习

3.3练习带答案版

3.3答案