

3.4 函数的奇偶性

第 3 章 函数的秘密性格：奇偶性大揭秘

3.4 奇偶性：函数的“对称美学”(定义域要对称)

欢迎来到函数的“性格鉴定站”！今天我们要聊聊函数的奇偶性——这玩意儿就像是函数的身份证，告诉你它是“怪咖”还是“乖宝宝”，或者干脆是个“混血儿”。准备好了吗？咱们开始吧！

一、奇偶性是什么？函数的“对称基因”

1. 奇函数：怪咖界的代表

定义：一个函数如果满足“换个负号，我还是我反面”的条件——也就是对于任意 x ，有 $f(-x) = -f(x)$ ，而且它的定义域得像个“左右对称的镜子”（关于原点对称），那它就是个奇函数。

图像特点：它的图像绕着原点转 180 度后，跟自己长得一模一样，像个“旋转对称”的艺术品。

举个栗子：

- $y = x$ ：你给我-1，我给你-1；你给我 1，我给你 1。完美符合“反面操作”。
- $y = x^3$ ：负数变负，整数变正，绕原点对称，妥妥的奇函数。

人话版：奇函数就是那种“你敢给我负数，我就敢给你个反击”的狠角色。图像扭一扭，像个不服输的小怪兽，绝不向 y 轴低头！

2. 偶函数：乖宝宝的模范

定义：如果一个函数满足“换不换负号，我都一个样”的条件——也就是对于任意 x ，有 $f(-x) = f(x)$ ，定义域也得是“左右对称”的，那它就是个偶函数。

图像特点：它的图像就像照镜子，沿着 y 轴对折后完全重合，简直是“轴对称”的代言人。

举个栗子：

- $y = x^2$ ：不管是-2 还是 2，我都给你 4，稳如老狗。
- $y = |x|$ ：正负都一样，谁敢说我不对称？

人话版：偶函数就是那种“老子左右平衡，谁也别想打破我的和谐”的佛系选手。图像往 y 轴上一靠，摆出一副“你奈我何”的嚣张脸！

二、常见函数的“性格鉴定表”

咱们来给一些常见函数做个“性格体检”，看看它们是奇是偶，还是“不好惹的混血儿”。

1. 多项式家族

- 全是奇次幂：比如 $y = x^3 + 5x$ ，定义域对称，换个负号后结果反过来，奇函数无疑。
- 全是偶次幂：比如 $y = 2x^2 + x^4$ ，正负结果一样，妥妥的偶函数。
- 奇偶混搭：比如 $y = x + x^2$ ，换负号后既不反过来也不一样，属于“非奇非偶”的叛逆分子。

人话版：多项式就像个大家庭，奇次幂的都是怪咖，偶次幂的都是乖仔，混在一起的，谁也管不了谁，乱成一锅粥！

2. 常值函数：低调的“双面人”

- $y = 5$ ：不管你给啥，我都回 5，偶函数没跑了。
- $y = 0$ ：不仅左右一样（偶），反过来还是自己（奇），这家伙居然是“奇偶双修”的隐藏大佬！

人话版：常值函数就是个“面瘫”，你爱咋咋地，我自岿然不动。0 更是贱兮兮地两边通吃，牛逼得让人想揍它！

3. 正比例函数：耿直 Boy

- $y = 3x$ ：负数变负，正数变正，绕原点对称，奇函数无疑。

人话版：这货就是个一根筋，你给啥我按比例翻倍还你，绝不含糊，耿直得像数学界的钢铁侠！

4. 反比例函数：叛逆小王子

- $y = \frac{2}{x}$ ：定义域不含 0，但左右对称，换负号后结果反过来，奇函数没毛病。

人话版：反比例这小子，天生反骨，你越压它，它越跟你对着干，图像扭来扭去，就是不走寻常路！

5. 二次函数：看心情决定

- $y = 2x^2 + 1$ （没有 x 项， $b=0$ ）：左右对称，偶函数。
- $y = x^2 + 3x$ （有 x 项）：换负号后乱套，非奇非偶。

人话版：二次函数这家伙，心情好就当偶函数摆 pose，心情不好就跟你玩“不好惹”，完全看它一天吃了啥！

6. 指数和对数：不好惹的独行侠

- $y = 2^x$ ：正负结果不一样，也不反过来，非奇非偶。
- $y = \log_2 x$ ：定义域压根不对称，直接 pass，啥也不是。

人话版：这俩货就是数学界的“独狼”，不服管教，谁的面子都不给，奇偶性？不存在的，滚一边去！

三、奇偶函数的“朋友圈规则”（看看就行了,不用管）

函数之间也有社交法则，咱们看看它们怎么“混搭”：

1. 奇 + 奇 = 奇：怪咖加怪咖，还是怪咖。

2. 偶 + 偶 = 偶：乖仔加乖仔，依旧和谐。
3. 奇 × 偶 = 奇：怪咖拉上乖仔，乖仔也变怪了。
4. 奇 × 奇 = 偶：俩怪咖打架，反而和谐了。
5. 偶 × 偶 = 偶：乖仔组团，稳得一批。
6. 奇 + 偶 = 乱七八糟：怪咖和乖仔掺和，谁也说服不了谁。

人话版：这就像班级聚会，怪咖组团还是怪，乖仔抱团还是乖，混搭就乱套——数学界的“社交定律”，记住了没？

四、怎么鉴定函数的“性格”？

方法 1：公式验身

步骤：

1. 先看定义域：左右不对称？直接判“非奇非偶”，散会！
2. 计算 $f(-x)$ ：
 - 等于 $-f(x)$ ？奇函数，恭喜你！
 - 等于 $f(x)$ ？偶函数，稳了！
 - 啥也不是？非奇非偶，走人！
 - 既等于 $-f(x)$ 又等于 $f(x)$ ？那就是 $y = 0$ 这朵奇葩，双重身份！

人话版：这法子就像查户口，定义域不对称的直接滚蛋，剩下的算一算，看看它敢不敢跟我耍花样！

方法 2：图像观相

- 绕原点转 180 度没变样？奇函数。
- 沿着 y 轴对折没差别？偶函数。
- 两边都不像？非奇非偶。

人话版：这招就是“看脸”，长得扭扭歪歪的是奇，长得左右对称的是偶，长得乱七八糟的，啥也不是，下一位！

小结：奇偶性的“人生哲理”

常见函数“性格体检表”				
函数类型	奇偶性	条件或特点	例子	人话版吐槽
多项式	奇函数	全是奇次幂，定义域对称	$y = x^3 + 5x$	“全是怪咖基因，扭起来！”
	偶函数	全是偶次幂，定义域对称	$y = 2x^2 + x^4$	“乖仔血统，稳得一批！”
	非奇非偶	奇偶混杂	$y = x + x^2$	“家族内讧，谁也别想统一！”
常值函数	偶函数	不管啥输入都一样	$y = 5$	“面瘫脸，懒得变！”
	奇+偶双修	输出永远是0	$y = 0$	“两边通吃，贱得想揍它！”
正比例函数	奇函数	直线上升，绕原点对称	$y = 3x$	“耿直Boy，绝不含糊！”
反比例函数	奇函数	定义域不含0，绕原点对称	$y = \frac{2}{x}$	“反骨仔，越压越歪！”
二次函数	偶函数	没有x项，左右对称	$y = 2x^2 + 1$	“摆pose，偶得不行！”
	非奇非偶	有x项，失去对称	$y = x^2 + 3x$	“心情不好，谁也别惹我！”
指数函数	非奇非偶	正负输出不对称	$y = 2^x$	“独狼一条，谁的面子都不给！”
对数函数	非奇非偶	定义域不对称	$y = \log_2 x$	“野生派，奇偶性？滚一边去！”

奇函数像个不服输的斗士，偶函数像个追求平衡的和平使者，非奇非偶的则是“随心所欲”的野生派。学会分辨它们，不仅能解题，还能感受到数学的“人性美”！有啥不明白的，随时来问我，咱们接着唠！

- 3.4 练习
- 3.4 答案
- 3.4 练习带答案