4.1.1 指数和指数函数

4.1.1 指数的世界：从根号到幂运算

4.1.1 指数的基础：认识根号和幂

一、根号的奥秘：n 次根是什么？

官方版

在数学中，如果一个数 x 满足 $x^n = a$（其中 n 是一个大于 1 的自然数），我们就说 x 是 a 的 **n 次方根**，用符号表示为 $x = \sqrt[n]{a}$。简单来说，n 次方根就是“反过来求幂”的运算：已知结果 a 和次数 n，我们要找出底数 x。

但根号的性质有点讲究，根据 n 是奇数还是偶数，情况会差别很大：

1. **n 是偶数时（比如 2、4、6）**：
   - 如果 a 是正数，a 有两个 n 次方根，一个正，一个负，分别记作 $+\sqrt[n]{a}$ 和 $-\sqrt[n]{a}$。其中，$\sqrt[n]{a}$ 默认指正的那个，叫做 **n 次算术方根**。
   - 如果 $a = 0$，那么 $x = 0$，没啥争议。
   - 如果 a 是负数，抱歉，实数范围内找不到答案（因为偶次幂不可能得出负数）。
2. **n 是奇数时（比如 3、5、7）**：
   - 不管 a 是正是负还是零，总能找到一个唯一的 x，也就是 $\sqrt[n]{a}$。
3. **重要性质**：
   - $(\sqrt[n]{a})^n = a$：把根号开出来的数再幂回去，结果就是原来的 a。
   - 如果先幂再开根：
     - n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$（直接等于原来数）。
     - n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a|$（结果总是非负，得看绝对值）。

举个例子：

- $\sqrt{9} = 3$（因为 $3^2 = 9$），但也有 -3（因为 $(-3)^2 = 9$）。
- $\sqrt[3]{-8} = -2$（因为 $(-2)^3 = -8$）。

人话版

好，根号这玩意儿其实就是数学里的“倒推大法”。比如 $x^3 = 8$，那 $x = \sqrt[3]{8} = 2$，因为 2 × 2 × 2 = 8，多简单！但这东西有几条规矩得搞清楚，不然就翻车了：

- **偶数次根（比如平方根、四次根）**：

  正数有俩答案，一个正一个负。比如 $\sqrt{4} = 2$ 或 –2，因为 2^2 和 $(-2)^2$ 都是 4。但负数？别想了，实数里没戏，负数开偶次根就是数学界的“未解之谜”。零就老实点，永远是 0。

- **奇数次根（比如三次根、五次根）**：

这家伙就痛快多了，不管你是正数负数还是零，总能给你一个答案。比如 $\sqrt[3]{-27} = -3$ ，因为 $(-3)^3 = -27$，没毛病。

- **小彩蛋**：你开个根再幂回去，肯定变回原来的数。但反过来先幂再开根，偶数次的话结果永远是正的，比如 $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ，负号被无情抛弃了，哈哈！

二、指数幂的家族：从正到负到分数

官方版

指数幂是数学里非常有趣的工具，用来表示一个数反复乘以自己的结果。底数是 a，指数是 n，写成 a^n 。具体的定义和种类如下：

1. **正整数指数**：

   $a^n = a \times a \times ... \times a$ （连乘 n 次），其中 $a \neq 0$， n 是自然数。

   比如： $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

2. **零指数**：

   任何非零数的 0 次幂等于 1，即 $a^0 = 1$ （ $a \neq 0$ ）。这是为了保持运算规则的一致性定义的。

3. **负整数指数**：

   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ （ $a \neq 0$ ），表示倒数。

   比如： $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ 。

4. **分数指数**：

   - 正分数指数： $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ，其中 m 和 n 是自然数， $n > 1$ 。

     - n 是奇数时， a 可以是任意实数。
     - n 是偶数时， a 必须非负（ $a \geq 0$ ）。

     比如： $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ 。

   - 负分数指数： $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ 。

     - n 是奇数时， $a \neq 0$ 。
     - n 是偶数时， $a > 0$ 。

     比如： $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ 。

人话版

指数就是数学界的“放大镜”或者“缩小镜”，看你怎么用：

- **正整数指数**：

  这就是“连乘大法”，比如 $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ ，简单粗暴。

- **零指数**：

  别问为啥 $5^0 = 1$ ，这是数学家硬定的规矩，为了让后面的运算不崩盘。你就当它是“空手套白狼”，啥也没干就拿个 1。

- **负指数**：

  > 负数就是"翻脸不认人"，变成倒数。比如 $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ ，从分子跑去分母，够贱吧！

- **分数指数**：

  > 这家伙最骚， $a^{\frac{m}{n}}$ 就是先把 a 弄成 a^m ，再开 n 次根。比如 $9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{9^3}=\sqrt{729}=27$ 。负分数就更绝，直接翻到分母去作妖，比如 $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ 。
  >
  > 注意啊，偶数次根的时候底数不能是负数，不然就瞎了眼了！

三、指数幂的玩法：运算规则

官方版

当底数 $a>0$ 、$b>0$ ，指数 m 、n 是任意实数时，指数幂有以下五大运算规律：

1. **乘法合并**： $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

   > （相同底数相乘，指数相加）。

2. **除法简化**： $a^m\div a^n=a^{m-n}$

   > （相同底数相除，指数相减）。

3. **幂的幂**： $(a^m)^n=a^{mn}$

   > （幂上加幂，指数相乘）。

4. **积的幂**： $(ab)^n=a^nb^n$

   > （乘积开幂，分别开）。

5. **商的幂**： $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

   > （分数开幂，分子分母分开算）。

举例：

- $2^3\cdot 2^4=2^{3+4}=2^7=128$
- $5^6\div 5^2=5^{6-2}=5^4=625$
- $(3^2)^3=3^{2\cdot 3}=3^6=729$

人话版

指数的运算就是"偷懒大法"，记住这五招，秒杀一切麻烦：

1. **底数一样就加**： $2^5\cdot 2^3=2^8$ ，指数加起来，懒得再乘了。
2. **除法就减**： $10^7\div 10^4=10^3$ ，指数一减，多爽！
3. **幂上加幂直接乘**： $(2^3)^2=2^6$ ，指数乘一乘，省事。
4. **积的幂拆开算**： $(3\cdot 4)^2=3^2\cdot 4^2$ ，各玩各的。
5. **分数的幂上下分开**： $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$ ，多优雅！

这些招式用熟了，考试随便虐！

配图说明（建议）：

画一个树形图，把这五条规则用分支表示，每个分支配一个小例子，视觉上更直观。

知识点总结表格

知识点	核心内容	关键注意事项	例子
n 次根	$x^n = a$ 的解为 $\sqrt[n]{a}$	偶数次根：正数双解，负数无解；奇数次根：唯一解	$\sqrt{4} = \pm 2$，$\sqrt[3]{-8}$
正整数指数	$a^n = a \times a \times \ldots$	$a \neq 0$	$2^3 = 8$
零指数	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	$5^0 = 1$
负指数	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a \neq 0$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$
分数指数	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	偶数 n 时 $a \geq 0$，负指数取倒数	$8^{\frac{2}{3}} = 4$
指数运算规则	乘加、除减、幂乘、积拆、商分	底数需正	$2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$

4.1答案

指数与根式运算练习题

计算题

例 1 计算下列各式的值：

1. $(3x^{-3}y^2)(-2x^4y^{-5})^2$
2. $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{125}$

变式训练：计算：

1. $-5m^{-4}n^3(3m^2n^{-2})^2$
2. $\left(\frac{9}{49}\right)^0 + 27^{\frac{1}{3}} - 0.04^{-\frac{1}{2}}$
3. $4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{8}$

函数与条件题

例 2 已知函数 $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$，求 $g(-64)$ 的值：

变式训练 2：已知函数 $h(x)=x^{-\frac{1}{3}}$，求 $h(125)$ 的值：

例 3 若 $b>3$，求 $\sqrt[4]{(b-3)^4}-\sqrt[5]{(3-b)^5}$ 的值。

变式训练 3：若 $c<1$，求 $\sqrt[3]{(1-c)^3}+\sqrt[6]{(c-1)^6}$ 的值。

选择题

1. 计算：$(3p^{-2})^{-2}=$
   > A. $9p^4$
   >
   > B. $\frac{1}{9}p^4$
   >
   > C. $\frac{1}{9}p^{-4}$
   >
   > D. $9p^{-4}$
2. 将 $\sqrt{(m+n)^4}$ 用分数指数形式表示：
   > A. $(m+n)^2$
   >
   > B. m^2+n^2
   >
   > C. $(m+n)^{\frac{1}{2}}$
   >
   > D. $(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}})^2$
3. 计算：$(-64)^{-\frac{1}{3}}=$
   > A. $-\frac{1}{4}$
   >
   > B. $\frac{1}{4}$
   >
   > C. –4
   >
   > D. 4
4. $3^{\frac{1}{3}}$ 用标准根式形式表示为：
   > A. $\sqrt{3}$

> B. $\sqrt[3]{3^2}$
>
> C. $\sqrt[3]{3}$
>
> D. $\sqrt[3]{27}$

5. 下列等式恒成立的是：

> A. $\sqrt{x^6}=x^3$
>
> B. $\sqrt[4]{x^4}=x$
>
> C. $\sqrt{x^2}=|x|$
>
> D. $(\sqrt{x})^2=x^2$

6. 下列等式正确的是：

> A. $k^3\cdot k^{-4}=k^{-1}$
>
> B. $(n^{-2})^{-3}=n^5$
>
> C. $(a^3b^{-2})^{-2}=a^{-6}b^{-4}$
>
> D. $\frac{p^5}{p^2}=p^{\frac{5}{2}}$

7. 已知 $t>0$ 且 $t\neq 1$，下列等式成立的是：

> A. $\sqrt[5]{t^3}=t^{\frac{3}{5}}$
>
> B. $t^m-t^n=t^{m-n}$
>
> C. $\sqrt{t^4}=-t^2$
>
> D. $(t^2)^n=t^{2+n}$

8. 下列计算正确的是：

> A. $(-2)^0=-1$
>
> B. $\sqrt[6]{(-5)^6}=5$
>
> C. $4^{-2}=-\frac{1}{16}$
>
> D. $\sqrt[3]{(-8)^3}=-2$

9. 下列运算错误的是：

> A. $\sqrt[3]{\left(-\frac{27}{64}\right)^2}=\frac{9}{16}$
>
> B. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=2$
>
> C. $(x^3y^{-2})^{-\frac{1}{3}}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x}$
>
> D. $2^m\cdot 5^m=10^{2m}$

10. 已知 $2^x=3,2^y=5,2^z=15$，则：

> A. $x+y=z$
>
> B. $xy=z$

> C. $2x = y + z$
>
> D. $x^2 + y^2 = z$

填空题

1. 当 k 为奇数时，$\sqrt[k]{(-5)^k} =$ ______；当 k 为偶数时，$\sqrt[k]{(-5)^k} =$ ______.
2. 求值：$(e+\pi)^0 =$ ______；$81^{\frac{1}{4}} =$ ______.
3. 计算：$(p^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{1}{3}})^2 + (p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}})^2 =$ ______.
4. 设 $u > 0, v > 0$，则 $(u^3 v^{-\frac{1}{3}})^{-3} =$ ______.
5. 若 $2^a = 7, 4^b = 11$，则 $2^{a+2b} =$ ______.
6. 求值：$\left(\frac{5}{8}\right) \times \left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}} \div \left(\frac{5}{2}\right)^1 =$ ______.
7. 求值：$(-0.25)^{2022} \times (-4)^{2023} =$ ______.