

## 4.1.2 指数函数细讲

### 第 4 章 函数的奇妙世界

#### 4.1.2 指数函数：数字的“暴走”之旅

##### 一、指数函数是什么？

###### 官方版

指数函数是一种形如  $y = a^x$  的数学函数，其中  $a$  是底数，满足  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ， $x$  是指数，自变量  $x$  的取值范围（即定义域）是全体实数  $\mathbb{R}$ 。函数的值  $y$  表示底数  $a$  被“放大”或“缩小”到  $x$  次方的结果。由于  $a$  永远是正数， $y$  的取值范围（即值域）是所有正实数  $(0, +\infty)$ 。

限制条件：

- $a > 0$ ：保证函数值始终为正（负数底数会导致某些情况下出现复数，不在我们讨论范围）。
- $a \neq 1$ ：因为如果  $a = 1$ ，那么  $y = 1^x = 1$ ，就变成了一个无聊的常数函数，没啥研究的必要。

###### 人话版

指数函数  $y = a^x$  就是个“数字暴走”的家伙！想象  $a$  是个开关， $x$  是控制它疯狂程度的遥控器。你按一下， $a$  就把自己乘起来， $x$  次越多，它就越疯。比如  $a = 2$ ， $x = 3$ ，那就是  $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。但有个规矩： $a$  必须是正数（不能是负的，不然这家伙会发脾气跑去复数世界），而且不能是 1（因为  $1^x$  永远是 1，跟个死鱼一样没动静）。定义域是  $\mathbb{R}$ ，啥意思？就是  $x$  可以随便填任何实数，函数都给你算出个结果来！值域呢？永远是正的， $(0, +\infty)$ ，永远不会掉到 0 或负数那边去。

##### 二、指数函数的“长相”和“性格”

###### 官方版

指数函数  $y = a^x$  的图像和性质取决于底数  $a$  的大小，主要分为两种情况： $a > 1$  和  $0 < a < 1$ 。

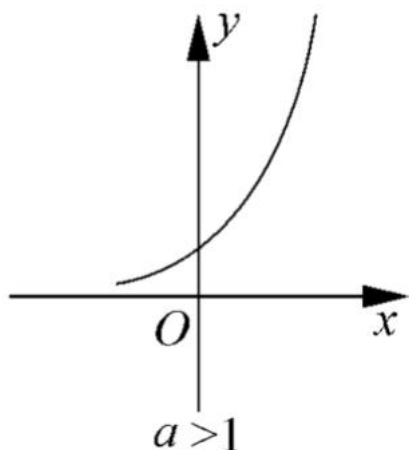
###### 1. 共同特点：

- 定义域：全体实数  $\mathbb{R}$ 。
- 值域：正实数  $(0, +\infty)$ 。
- 图像必过点  $(0, 1)$ ：因为当  $x = 0$  时， $y = a^0 = 1$ 。
- 非奇非偶：函数图像不对称，既不是关于原点对称（奇函数），也不是关于  $y$  轴对称（偶函数）。

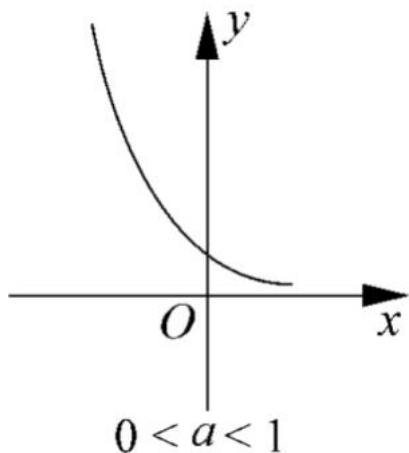
###### 2. 不同特点：

- 当  $a > 1$  时：

- 函数在  $\mathbb{R}$  上是单调递增的，即  $x$  越大， $y$  越大。
- 当  $x > 0$  时， $y > 1$ ；当  $x < 0$  时， $0 < y < 1$ 。
- 图像从左下（趋近于  $y = 0$ ）上升到右上（趋近于无穷大）。



- 当  $0 < a < 1$  时：
  - 函数在  $\mathbb{R}$  上是单调递减的，即  $x$  越大， $y$  越小。
  - 当  $x > 0$  时， $0 < y < 1$ ；当  $x < 0$  时， $y > 1$ 。
  - 图像从左上（趋近于无穷大）下降到右下（趋近于  $y = 0$ ）。



图像建议：

- $a > 1$  的图像：插入一个从左下到右上逐渐上升的平滑曲线，标出点  $(0, 1)$ ，并在  $x$  轴下方标注“趋近  $y = 0$ ”，右侧标注“趋近  $+\infty$ ”。
- $0 < a < 1$  的图像：插入一个从左上到右下逐渐下降的平滑曲线，标出点  $(0, 1)$ ，左侧标注“趋近  $+\infty$ ”，右侧标注“趋近  $y = 0$ ”。

## 人话版

指数函数的“长相”取决于  $a$  是“大哥”还是“小弟”。

- \*\*  $a > 1$ （比如  $a = 2$ ）\*\*：这家伙是个暴发户， $x$  越大，它就越嚣张，蹭蹭往上窜，像火箭发射，从左下角（靠近  $y = 0$ ）冲到右上角（飞向无穷大）。中间路过  $(0, 1)$ ，因为  $2^0 = 1$ 。它是个“增函数”， $x$  加一，它就开心得不得了， $y$  也跟着涨。

- **\*\*  $0 < a < 1$  (比如  $a = 0.5$ ) \*\***: 这货是个怂包,  $x$  越大, 它越缩水, 像个胆小鬼从左上角 (高高在上) 滑到右下角 (贴着  $y = 0$ )。也路过  $(0, 1)$ , 毕竟  $0.5^0 = 1$ 。它是个“减函数”,  $x$  加一, 它就哭着喊着往下掉。

两兄弟的共同点? 定义域都是  $\mathbb{R}$ , 值域都是正数, 图像都得经过  $(0, 1)$ , 而且都不奇不偶, 长得歪七扭八, 不对称。

画图提醒:

- $a = 2$  的图, 像个爬坡的土豪, 往右上冲。
- $a = 0.5$  的图, 像个滑梯上的怂蛋, 往右下溜。

### 三、怎么判断它“脾气”是大还是小?

#### 官方版

指数函数的单调性 (即函数值随自变量变化的趋势) 由底数  $a$  决定:

- **单调递增**: 当  $a > 1$  时, 若  $x_1 < x_2$ , 则  $a^{x_1} < a^{x_2}$ , 函数值随  $x$  增大而增大。
- **单调递减**: 当  $0 < a < 1$  时, 若  $x_1 < x_2$ , 则  $a^{x_1} > a^{x_2}$ , 函数值随  $x$  增大而减小。

判断方法: 取任意两点  $x_1$  和  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 比较  $a^{x_1}$  和  $a^{x_2}$  的大小即可。

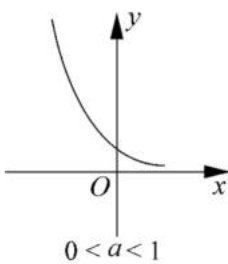
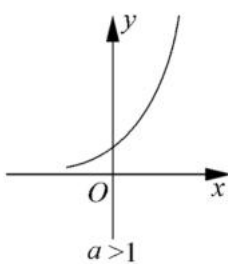
#### 人话版

想知道这家伙是“暴脾气” (增函数) 还是“怂脾气” (减函数)? 就看  $a$  的脸!

- $a > 1$ : 比如  $a = 2$ , 你试试  $x = 1$  和  $x = 2$ , 算算看,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $x$  变大,  $y$  也跟着嚣张起来, 妥妥的增函数, 像个不服输的杠精。
- $0 < a < 1$ : 比如  $a = 0.5$ ,  $x = 1$  是  $0.5^1 = 0.5$ ,  $x = 2$  是  $0.5^2 = 0.25$ ,  $x$  变大,  $y$  反而萎了, 跟个怂包似的往下掉, 典型的减函数。

判断秘诀: 随便挑两个  $x$ , 小的在前大的在后, 算出  $y$  比比看, 涨了就是增, 跌了就是减, 简单粗暴!

### 四、知识点总结表格

图 像		
定义域	$\mathbb{R}$	
值 域	$(0, +\infty)$	
性 质	过定点 $(0, 1)$	
	非奇非偶	
	在 $\mathbb{R}$ 上是减函数	在 $\mathbb{R}$ 上是增函数

内容	$a > 1$ (如 $y = 2^x$ )	$0 < a < 1$ (如 $y = 0.5^x$ )
定义域	$\mathbb{R}$ (全体实数)	$\mathbb{R}$ (全体实数)
值域	$(0, +\infty)$ (正实数)	$(0, +\infty)$ (正实数)
图像特征	从左下到右上, 过 $(0, 1)$ , 趋近 $y = 0$ 和 $+\infty$	从左上到右下, 过 $(0, 1)$ , 趋近 $+\infty$ 和 $y = 0$
单调性	单调递增 ( $x$ 增大, $y$ 增大)	单调递减 ( $x$ 增大, $y$ 减小)
关键点表现	$x > 0$ 时 $y > 1$ ; $x < 0$ 时 $0 < y < 1$	$x > 0$ 时 $0 < y < 1$ ; $x < 0$ 时 $y > 1$
奇偶性	非奇非偶 (不对称)	非奇非偶 (不对称)

#### 4.1.2 答案

## 指数函数练习题

### 典例精析

#### 例 1

下列选项中, 哪个函数属于指数函数?

- A.  $y = 5x$
- B.  $y = 2^x$
- C.  $y = x^3$
- D.  $y = 4^x - 1$

解析: 指数函数的形式为  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 指数为变量  $x$ 。

- A 是线性函数, B 符合定义, C 是幂函数, D 是指数函数的变形 (非纯指数函数)。

答案: B

### 变式训练 1

若函数  $y = (3k + 1)b^x$  是指数函数, 则  $k$  的值为多少?

### 例 2

若函数  $y = b^x$  ( $b > 0$  且  $b \neq 1$ ) 的图像始终在  $x$  轴上方, 且随  $x$  增大而单调递增, 则  $b$  的取值范围是:

- A.  $\{b \mid 0 < b < 1\}$
- B.  $\{b \mid b > 1\}$
- C.  $\{b \mid b > 0\}$
- D.  $\{b \mid b < 0\}$

解析: 指数函数恒正 ( $b > 0$ ), 递增时  $b > 1$ 。

答案: B

### 变式训练 2

指数函数  $y = 10^x$  的图像大致形状是怎样的?

### 例 3

已知指数函数  $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且满足  $g(4x) = 16^x$ , 则  $g(x)$  的表达式为:

- A.  $2^x$
- B.  $4^x$
- C.  $8^x$
- D.  $16^x$

解析: 设  $g(x) = a^x$ , 则  $a^{4x} = 16^x = (2^4)^x$ , 故  $a = 2$ 。

答案: A

### 变式训练 3

若  $g(5x) = 3^x$ , 则  $g(10)$  的值是多少?

### 例 4

已知指数函数  $h(x) = c^x$ , 且  $h(3) = 64$ , 则  $c$  的值为多少?

解析:  $c^3 = 64$ , 解得  $c = 4$  ( $c > 0$ )。

答案: 4

### 变式训练 4

函数  $y = 5^{-x}$  在实数域上的单调性是:

- A. 单调递增
- B. 单调递减

- C. 先增后减
- D. 先减后增

#### 例 5

已知  $d > 0$  且  $d \neq 1$ ，函数  $f(x) = d^{x+1} - 2$  的图像始终经过某个固定点，该点的坐标是多少？

解析：令  $x + 1 = 0$ ，即  $x = -1$ ，则  $f(-1) = d^0 - 2 = -1$ ，定点为  $(-1, -1)$ 。

答案： $(-1, -1)$

#### 变式训练 5

已知  $e > 0$  且  $e \neq 1$ ，函数  $f(x) = e^{x+3} + 4$  的图像恒过定点的坐标是多少？

#### 例 6

函数  $f(x) = \sqrt{3 - 5^x}$  的定义域是：

- A.  $(-\infty, +\infty)$
- B.  $(0, +\infty)$
- C.  $(-\infty, \log_5 3]$
- D.  $[0, +\infty)$

解析：被开方数非负，即  $5^x \leq 3$ ，解得  $x \leq \log_5 3$ 。

答案：C

#### 例 7

比较下列两组实数的大小：

1.  $2.5^3$  和  $2.5^{-2}$
2.  $0.8^5$  和  $0.8^6$

解析：

1.  $2.5 > 1$ ，函数递增，故  $2.5^3 > 2.5^{-2}$ ；
2.  $0.8 < 1$ ，函数递减，故  $0.8^5 > 0.8^6$ 。

答案：

1.  $2.5^3 > 2.5^{-2}$
2.  $0.8^5 > 0.8^6$

## 同步精练

### 选择题

1. 下列函数中, 属于指数函数的是:

- A.  $y = x^5$  (幂函数)
- B.  $y = 7^x$  (指数函数)
- C.  $y = 3x + 1$  (一次函数)
- D.  $y = \sqrt{x}$  (根式函数)

2. 函数  $y = 4^x$  和  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  的图像关于什么对称?

- A.  $x$  轴
- B.  $y$  轴 ( $y = 4^{-x}$  是  $y = 4^x$  的对称图像)
- C. 原点
- D. 直线  $y = x$

3. 下列函数在定义域内单调递减的是:

- A.  $y = 2^x$  (递增,  $2 > 1$ )
- B.  $y = 0.9^x$  (递减,  $0 < 0.9 < 1$ )
- C.  $y = 1.5^x$  (递增,  $1.5 > 1$ )
- D.  $y = x^2$  (非单调函数)

4. 下列判断正确的是:

- A.  $3^{-2} > 3^{-1}$
- B.  $0.6^4 < 0.6^3$
- C.  $1.2^0 = 1.2^1$
- D.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

5. 若  $y = (5 - k)^x$  在实数域上单调递增, 则  $k$  的取值范围是:

- A.  $(4, 5)$
- B.  $(-\infty, 4)$
- C.  $(4, +\infty)$
- D.  $(-\infty, 5)$

### 填空题

1. 若  $h(2x) = 8^x$ , 则  $h(4)$  的值是多少?

2. 函数  $f(x) = \sqrt{2^x + 1}$  的定义域是多少?

3. 已知  $g(x) = 4^x$ , 则  $g(2) \cdot g(-1)$  的值是多少?

4. 若正数  $b$  满足  $b^3 < b^2$ , 则  $b$  的取值范围是多少?
5. 若  $2^{2x-3} > 2^{x+1}$ , 则  $x$  的取值范围是多少?
6. 函数  $y = \frac{3^x}{3^x+2}$  的定义域是多少?
7. 函数  $f(x) = 3^{-x}$  的图像一定经过第几个象限?
8. 若  $f(x)$  是偶函数, 且当  $x > 0$  时  $f(x) = 2^{x-1}$ , 则  $f(-1)$  的值是多少?
9. 当  $c > 0$  且  $c \neq 1$  时, 函数  $f(x) = c^{x+2} - 3$  的图像恒过定点的坐标是多少?
10. 比较下列两组实数的大小:
11.  $0.7^2$  \_\_\_  $0.7^1$
12.  $1.8^{-3}$  \_\_\_  $1.8^{-2}$
13. 已知  $f(x) = 5^x$ , 且  $f(n) > f(1)$ , 则实数  $n$  的取值范围是多少?

#### 解答题

1. 已知指数函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像经过点  $(3, 27)$ , 求  $f(\frac{1}{3})$  的值。