

4.1.2 指数函数细讲

第4章 函数的奇妙世界

4.1.2 指数函数：数字的“暴走”之旅

一、指数函数是什么？

官方版

指数函数是一种形如 $y = a^x$ 的数学函数，其中 a 是底数，满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， x 是指数，自变量 x 的取值范围（即定义域）是全体实数 \mathbb{R} 。函数的值 y 表示底数 a 被“放大”或“缩小”到 x 次方的结果。由于 a 永远是正数， y 的取值范围（即值域）是所有正实数 $(0, +\infty)$ 。

限制条件：

- $a > 0$ ：保证函数值始终为正（负数底数会导致某些情况下出现复数，不在我们讨论范围）。
- $a \neq 1$ ：因为如果 $a = 1$ ，那么 $y = 1^x = 1$ ，就变成了一个无聊的常数函数，没啥研究的必要。

人话版

指数函数 $y = a^x$ 就是个“数字暴走”的家伙！想象 a 是个开关， x 是控制它疯狂程度的遥控器。你按一下， a 就把自己乘起来， x 次越多，它就越疯。比如 $a = 2$ ， $x = 3$ ，那就是 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。但有个规矩： a 必须是正数（不能是负的，不然这家伙会发脾气跑去复数世界），而且不能是 1（因为 1^x 永远是 1，跟个死鱼一样没动静）。定义域是 \mathbb{R} ，啥意思？就是 x 可以随便填任何实数，函数都给你算出个结果来！值域呢？永远是正的， $(0, +\infty)$ ，永远不会掉到 0 或负数那边去。

二、指数函数的“长相”和“性格”

官方版

指数函数 $y = a^x$ 的图像和性质取决于底数 a 的大小，主要分为两种情况： $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 。

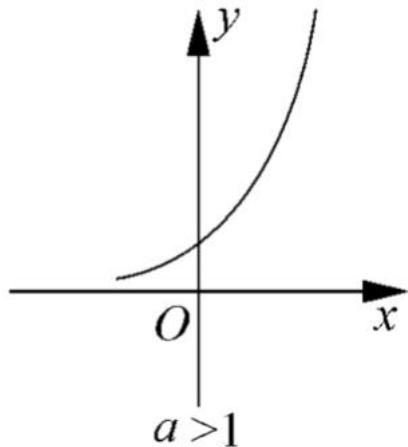
1. 共同特点：

- 定义域：全体实数 \mathbb{R} 。
- 值域：正实数 $(0, +\infty)$ 。
- 图像必过点 $(0, 1)$ ：因为当 $x = 0$ 时， $y = a^0 = 1$ 。
- 非奇非偶：函数图像不对称，既不是关于原点对称（奇函数），也不是关于 y 轴对称（偶函数）。

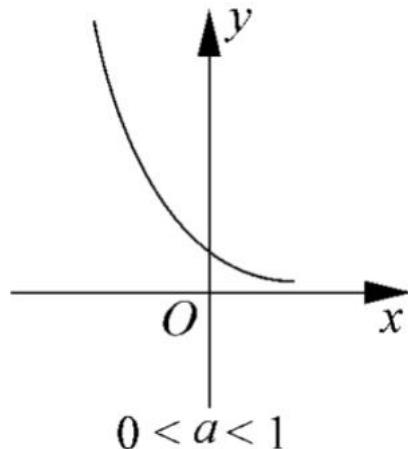
2. 不同特点：

- 当 $a > 1$ 时：

- 函数在 \mathbb{R} 上是单调递增的，即 x 越大， y 越大。
- 当 $x > 0$ 时， $y > 1$ ；当 $x < 0$ 时， $0 < y < 1$ 。
- 图像从左下（趋近于 $y = 0$ ）上升到右上（趋近于无穷大）。



- 当 $0 < a < 1$ 时：
 - 函数在 \mathbb{R} 上是单调递减的，即 x 越大， y 越小。
 - 当 $x > 0$ 时， $0 < y < 1$ ；当 $x < 0$ 时， $y > 1$ 。
 - 图像从左上（趋近于无穷大）下降到右下（趋近于 $y = 0$ ）。



图像建议：

- $a > 1$ 的图像：插入一个从左下到右上逐渐上升的平滑曲线，标出点 $(0, 1)$ ，并在 x 轴下方标注“趋近 $y = 0$ ”，右侧标注“趋近 $+\infty$ ”。
- $0 < a < 1$ 的图像：插入一个从左上到右下逐渐下降的平滑曲线，标出点 $(0, 1)$ ，左侧标注“趋近 $+\infty$ ”，右侧标注“趋近 $y = 0$ ”。

人话版

指数函数的“长相”取决于 a 是“大哥”还是“小弟”。

- ** $a > 1$ (比如 $a = 2$) **：这家伙是个暴发户， x 越大，它就越嚣张，蹭蹭往上窜，像火箭发射，从左下角（靠近 $y = 0$ ）冲到右上角（飞向无穷大）。中间路过 $(0, 1)$ ，因为 $2^0 = 1$ 。它是个“增函数”， x 加一，它就开心得不得了， y 也跟着涨。

- ** $0 < a < 1$ (比如 $a = 0.5$) **: 这货是个怂包, x 越大, 它越缩水, 像个胆小鬼从左上角 (高在上) 滑到右下角 (贴着 $y = 0$)。也路过 $(0, 1)$, 毕竟 $0.5^0 = 1$ 。它是个“减函数”, x 加一, 它就哭着喊着往下掉。

两兄弟的共同点? 定义域都是 \mathbb{R} , 值域都是正数, 图像都得经过 $(0, 1)$, 而且都不奇不偶, 长得歪七扭八, 不对称。

画图提醒:

- $a = 2$ 的图, 像个爬坡的土豪, 往右上冲。
- $a = 0.5$ 的图, 像个滑梯上的怂蛋, 往右下溜。

三、怎么判断它“脾气”是大还是小?

官方版

指数函数的单调性 (即函数值随自变量变化的趋势) 由底数 a 决定:

- **单调递增:** 当 $a > 1$ 时, 若 $x_1 < x_2$, 则 $a^{x_1} < a^{x_2}$, 函数值随 x 增大而增大。
- **单调递减:** 当 $0 < a < 1$ 时, 若 $x_1 < x_2$, 则 $a^{x_1} > a^{x_2}$, 函数值随 x 增大而减小。

判断方法: 取任意两点 x_1 和 x_2 ($x_1 < x_2$), 比较 a^{x_1} 和 a^{x_2} 的大小即可。

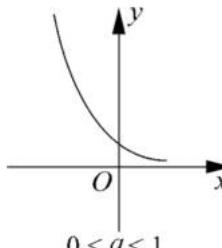
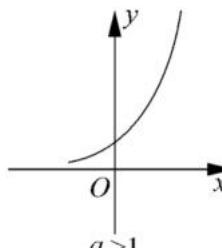
人话版

想知道这家伙是“暴脾气” (增函数) 还是“怂脾气” (减函数) ? 就看 a 的脸!

- $a > 1$: 比如 $a = 2$, 你试试 $x = 1$ 和 $x = 2$, 算算看, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, x 变大, y 也跟着嚣张起来, 妥妥的增函数, 像个不服输的杠精。
- $0 < a < 1$: 比如 $a = 0.5$, $x = 1$ 是 $0.5^1 = 0.5$, $x = 2$ 是 $0.5^2 = 0.25$, x 变大, y 反而萎了, 跟个怂包似的往下掉, 典型的减函数。

判断秘诀: 随便挑两个 x , 小的在前大的在后, 算出 y 比比看, 涨了就是增, 跌了就是减, 简单粗暴!

四、知识点总结表格

图 像		
定域	\mathbb{R}	
值域	$(0, +\infty)$	
性 质	过定点 $(0, 1)$ 非奇非偶 在 \mathbb{R} 上是减函数	在 \mathbb{R} 上是增函数

内容	$a > 1$ (如 $y = 2^x$)	$0 < a < 1$ (如 $y = 0.5^x$)
定义域	\mathbb{R} (全体实数)	\mathbb{R} (全体实数)
值域	$(0, +\infty)$ (正实数)	$(0, +\infty)$ (正实数)
图像特征	从左下到右上, 过 $(0, 1)$, 趋近 $y = 0$ 和 $+\infty$	从左上到右下, 过 $(0, 1)$, 趋近 $-\infty$
单调性	单调递增 (x 增大, y 增大)	单调递减 (x 增大, y 减小)
关键点表现	$x > 0$ 时 $y > 1$; $x < 0$ 时 $0 < y < 1$	$x > 0$ 时 $0 < y < 1$; $x < 0$ 时 $y > 1$
奇偶性	非奇非偶 (不对称)	非奇非偶 (不对称)

4.1.2 答案

指数函数练习题

典例精析

例 1

下列选项中, 哪个函数属于指数函数?

- A. $y = 5x$
- B. $y = 2^x$
- C. $y = x^3$
- D. $y = 4^x - 1$

解析: 指数函数的形式为 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 指数为变量 x 。

- A 是线性函数, B 符合定义, C 是幂函数, D 是指数函数的变形 (非纯指数函数)。

答案: B

变式训练 1

若函数 $y = (3k + 1)b^x$ 是指数函数，则 k 的值为多少？

例 2

若函数 $y = b^x$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$) 的图像始终在 x 轴上方，且随 x 增大而单调递增，则 b 的取值范围是：

- A. $\{b \mid 0 < b < 1\}$
- B. $\{b \mid b > 1\}$
- C. $\{b \mid b > 0\}$
- D. $\{b \mid b < 0\}$

解析：指数函数恒正 ($b > 0$)，递增时 $b > 1$ 。

答案：B

变式训练 2

指数函数 $y = 10^x$ 的图像大致形状是怎样的？

例 3

已知指数函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且满足 $g(4x) = 16^x$ ，则 $g(x)$ 的表达式为：

- A. 2^x
- B. 4^x
- C. 8^x
- D. 16^x

解析：设 $g(x) = a^x$ ，则 $a^{4x} = 16^x = (2^4)^x$ ，故 $a = 2$ 。

答案：A

变式训练 3

若 $g(5x) = 3^x$ ，则 $g(10)$ 的值是多少？

例 4

已知指数函数 $h(x) = c^x$ ，且 $h(3) = 64$ ，则 c 的值为多少？

解析： $c^3 = 64$ ，解得 $c = 4$ ($c > 0$)。

答案：4

变式训练 4

函数 $y = 5^{-x}$ 在实数域上的单调性是：

- A. 单调递增
- B. 单调递减

- C. 先增后减
- D. 先减后增

例 5

已知 $d > 0$ 且 $d \neq 1$ ，函数 $f(x) = d^{x+1} - 2$ 的图像始终经过某个固定点，该点的坐标是多少？

解析：令 $x + 1 = 0$ ，即 $x = -1$ ，则 $f(-1) = d^0 - 2 = -1$ ，定点为 $(-1, -1)$ 。

答案： $(-1, -1)$

变式训练 5

已知 $e > 0$ 且 $e \neq 1$ ，函数 $f(x) = e^{x+3} + 4$ 的图像恒过定点的坐标是多少？

例 6

函数 $f(x) = \sqrt{3 - 5^x}$ 的定义域是：

- A. $(-\infty, +\infty)$
- B. $(0, +\infty)$
- C. $(-\infty, \log_5 3]$
- D. $[0, +\infty)$

解析：被开方数非负，即 $5^x \leq 3$ ，解得 $x \leq \log_5 3$ 。

答案：C

例 7

比较下列两组实数的大小：

1. 2.5^3 和 2.5^{-2}
2. 0.8^5 和 0.8^6

解析：

1. $2.5 > 1$ ，函数递增，故 $2.5^3 > 2.5^{-2}$ ；
2. $0.8 < 1$ ，函数递减，故 $0.8^5 > 0.8^6$ 。

答案：

1. $2.5^3 > 2.5^{-2}$
2. $0.8^5 > 0.8^6$

同步精练

选择题

1. 下列函数中，属于指数函数的是：

- A. $y = x^5$ (幂函数)
- B. $y = 7^x$ (指数函数)
- C. $y = 3x + 1$ (一次函数)
- D. $y = \sqrt{x}$ (根式函数)

2. 函数 $y = 4^x$ 和 $y = (\frac{1}{4})^x$ 的图像关于什么对称？

- A. x 轴
- B. y 轴 ($y = 4^{-x}$ 是 $y = 4^x$ 的对称图像)
- C. 原点
- D. 直线 $y = x$

3. 下列函数在定义域内单调递减的是：

- A. $y = 2^x$ (递增, $2 > 1$)
- B. $y = 0.9^x$ (递减, $0 < 0.9 < 1$)
- C. $y = 1.5^x$ (递增, $1.5 > 1$)
- D. $y = x^2$ (非单调函数)

4. 下列判断正确的是：

- A. $3^{-2} > 3^{-1}$
- B. $0.6^4 < 0.6^3$
- C. $1.2^0 = 1.2^1$
- D. $(\frac{1}{3})^{-2} < (\frac{1}{3})^{-1}$

5. 若 $y = (5 - k)^x$ 在实数域上单调递增，则 k 的取值范围是：

- A. $(4, 5)$
- B. $(-\infty, 4)$
- C. $(4, +\infty)$
- D. $(-\infty, 5)$

填空题

1. 若 $h(2x) = 8^x$ ，则 $h(4)$ 的值是多少？
2. 函数 $f(x) = \sqrt{2^x + 1}$ 的定义域是多少？
3. 已知 $g(x) = 4^x$ ，则 $g(2) \cdot g(-1)$ 的值是多少？

4. 若正数 b 满足 $b^3 < b^2$ ，则 b 的取值范围是多少？
5. 若 $2^{2x-3} > 2^{x+1}$ ，则 x 的取值范围是多少？
6. 函数 $y = \frac{3^x}{3^x + 2}$ 的定义域是多少？
7. 函数 $f(x) = 3^{-x}$ 的图像一定经过第几个象限？
8. 若 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x > 0$ 时 $f(x) = 2^{x-1}$ ，则 $f(-1)$ 的值是多少？
9. 当 $c > 0$ 且 $c \neq 1$ 时，函数 $f(x) = c^{x+2} - 3$ 的图像恒过定点的坐标是多少？
10. 比较下列两组实数的大小：
 11. 0.7^2 ____ 0.7^1
 12. 1.8^{-3} ____ 1.8^{-2}
13. 已知 $f(x) = 5^x$ ，且 $f(n) > f(1)$ ，则实数 n 的取值范围是多少？

解答题

1. 已知指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像经过点 $(3, 27)$ ，求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的值。