4.2.1 对数函数

第 4 章 对数与对数函数探秘

4.2 对数的奇妙世界

欢迎来到对数的奇妙世界！它就像数学里的“逆向魔法”，专门破解指数的秘密。接下来，我们将深入探索对数的定义、性质和运算规则，带你从零基础到彻底搞懂！

4.2.1 对数是什么？从指数到对数的华丽转身

官方版

对数是指数的“反操作”。假设有一个式子 $a^b = N$ ，其中 a 是一个正数且不等于 1（即 $a > 0, a \neq 1$ ）， N 也是正数（ $N > 0$ ），那么我们称 b 是以 a 为底、N 为真数的对数，记作 $b = \log_a N$ 。

- a 是底数，决定了整个对数的“基调”。
- N 是真数，也就是我们要“解码”的那个数。
- b 是对数值，表示“需要多少次 a 的乘法才能得到 N ”。

互化关系：指数形式和对数形式可以无缝切换：

$$a^b = N \quad \text{等价于} \quad \log_a N = b$$

举个例子：

如果 $2^3 = 8$ ，那么 $\log_2 8 = 3$ 。这就是对数的本质——它告诉你底数 a 需要“自我复制”多少次才能变成 N 。

插图建议：

画一个“指数到对数”的转换示意图：左边是 $2^3 = 8$ （用箭头表示 2 乘 3 次变成 8），右边是 $\log_2 8 = 3$ （用问号表示“需要几次？”），中间用双向箭头连接。

人话版

对数就是指数的“倒挂版”，有点像问：“嘿， a 你得翻几倍才能变成 N？”

比如 $2^3 = 8$ ，对数就是反过来问：“2 翻几倍变成 8？”答案是 3，所以 $\log_2 8 = 3$ 。

这玩意儿就是数学界的“猜谜游戏”，专治指数的“膨胀病”。你要是连这个都搞不懂，兄弟，别说你是数学爱好者，回家种田去吧！（开玩笑，别当真，咱们慢慢学！）

4.2.2 对数的基本性格：它有哪些“怪癖”？

官方版

对数有一些固定的“脾气”，了解它们能帮你更快上手：

1. **对 1 的执念**：任何底数的对数，只要真数是 1，结果永远是 0。

   > $$\log_a 1 = 0$$
   >
   > 因为 $a^0 = 1$，不管 a 是谁，0 次方就是 1。

2. **自我认同感**：底数自己当真数时，对数总是 1。

   > $$\log_a a = 1$$
   >
   > 因为 $a^1 = a$，一次就够了。

3. **挑剔的真数**：对数的真数必须是正数（$N > 0$），0 和负数它不认。

   > 原因很简单，指数 a^b （$a > 0$）永远吐不出 0 或负数。

人话版

对数这家伙有几个怪癖：

1. **1 是它的白月光**：甭管底数多牛逼，看到 1 就变 0。$\log_{\text{啥啥}} 1 = 0$，因为它懒得动，0 次就搞定。
2. **自恋狂**：底数自己玩自己时，永远是 1。$\log_5 5 = 1$，$\log_{666} 666 = 1$，多自恋啊！
3. **洁癖严重**：0 和负数？滚一边去，它只爱正数。想让 $2^x = -1$？做梦吧，数学不允许这种鬼畜操作！

4.2.3 对数的“超级密码”：恒等式

官方版

对数和指数之间有两条“黄金法则”：

1. **底数自己玩幂**：

   > $$\log_a a^n = n$$
   >
   > 意思是，以 a 为底，a 的 n 次方的对数就是 n。
   >
   > 例如：$\log_2 2^5 = 5$。

2. **对数还原术**：

   > $$a^{\log_a N} = N$$
   >
   > 把对数塞回指数里，真数 N 原封不动跑出来。
   >
   > 例如：$3^{\log_3 7} = 7$。

插图建议：

画一个循环图：左边是 a^n，箭头指向 $\log_a a^n = n$；右边是 $\log_a N$，箭头指向 $a^{\log_a N} = N$，突出“互逆”关系。

人话版

对数有俩“作弊码”：

1. **底数自嗨**：$\log_a a^n = n$ 。啥意思？比如 $\log_2 2^5$ ，2 自嗨 5 次，对数直接告诉你“5”，懒得算过程。
2. **原地复活**：$a^{\log_a N} = N$ 。对数算出来塞回去，N 还是那个 N ，跟孙悟空变回来似的。比如 $3^{\log_3 7} = 7$ ，不服不行！

这俩招就是对数的“终极奥义”，背下来，考试随便虐！

4.2.4 对数的“魔法公式”：运算规则

官方版

对数在运算时有三大“魔法公式”，前提是 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$：

1. **乘法变加法**：

   > $$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$
   >
   > 例如：$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$ 。

2. **除法变减法**：

   > $$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$
   >
   > 例如：$\log_3\left(\frac{9}{3}\right) = \log_3 9 - \log_3 3 = 2 - 1 = 1$ 。

3. **幂次放大镜**：

   > $$\log_a M^n = n \log_a M$$
   >
   > 例如：$\log_5 2^3 = 3 \log_5 2$ 。

人话版

对数运算简直是“偷懒神器”：

1. **乘法变加法**：两个数乘起来太麻烦？对数直接加！$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ ，2 + 3 = 5，爽不爽？
2. **除法变减法**：除法算得头晕？减一下完事！$\log_3(9/3) = \log_3 9 - \log_3 3$ ，2 – 1 = 1，轻松搞定。
3. **幂次放大**：幂次一大堆？拽出来乘一下！$\log_5 2^3 = 3 \log_5 2$ ，省得你算半天。

这仨公式就是对数的“魔法棒”，挥一挥，计算秒变简单！

4.2.5 换底大法：对数的“变身术”

官方版

对数的底数可以随意更换，这就是换底公式： 公式是：$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ 。

其中 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，且 $b \neq 1, c \neq 1$ 。

推导：设 $x = \log_b a$ ，则 $b^x = a$ 。两边取以 c 为底的对数，得：

$$\log_c b^x = \log_c ax \log_c b = \log_c a$$

$$x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

例如： $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$ 。

人话版

换底公式就是对数的“变装秀”：不喜欢这个底数？换一个！

公式是： $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ 。

比如你想算 $\log_2 5$ ，但 2 太别扭，直接换成自然对数： $\frac{\ln 5}{\ln 2}$ ，丢计算器里秒出结果。

这招牛逼在哪？随便换底，随便算，数学界的“变形金刚”了解一下！

4.2.6 常用对数和自然对数：两大明星

官方版

1. **常用对数**：以 10 为底的对数，记作 $\lg N$ 。

   > 例如： $\lg 100 = 2$ ，因为 $10^2 = 100$ 。

2. **自然对数**：以神奇数字 $e \approx 2.71828$ 为底的对数，记作 $\ln N$ 。

   > 例如： $\ln e = 1$ ，因为 $e^1 = e$ 。

这两个对数在科学计算和数学分析中超级常见。

人话版

1. **常用对数**：底是 10，简称 $\lg$ ，老百姓的最爱。比如 $\lg 100 = 2$ ，10 翻两次就 100，太接地气！
2. **自然对数**：底是 e ，约等于 2.71828，简称 $\ln$ ，高大上的学术派。$\ln e = 1$ ，多优雅！

这俩一个是大街货，一个是贵族范儿，考试必备，记住了！

4.2.7 对数的“锦囊妙计”：实用结论

官方版

以下是一些超实用的对数结论：

1. $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ （因为两边互为倒数）。

$\log_a b$ 与 $\log_b a$ 互为倒数

1. $\log_a b^n = n\log_a b$ （幂次放大规则）。
2. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ （连续换底的结果）。
3. $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2\cdot 5) = \lg 10 = 1$ 。
4. $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ （倒数变负号）。

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$$

人话版

对数还有几个“骚操作”：

1. $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ ，倒过来就换底，数学的“乾坤大挪移”。
2. $\log_a b^n = n\log_a b$ ，幂次直接拽出来，懒人福音。
3. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ，连环换底，帅到飞起。
4. $\lg 2 + \lg 5 = 1$ ，因为 2 × 5 = 10， $\lg 10 = 1$ ，简单粗暴。
5. $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ ，倒数就加个负号，小聪明满满。

知识点总结表格

知识点	核心内容	例子
对数定义	$a^b = N \Rightarrow \log_a N = b$	$\log_2 8 = 3$
基本性质	$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$	$\log_5 1 = 0$
恒等式	$\log_a a^n = n, a^{\log_a N} = N$	$\log_3 3^4 = 4$
运算规则	乘加、除减、幂次放大	$\log_2(4 \cdot 8) = 5$
换底公式	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$
常用/自然对数	$\lg N = \log_{10} N, \ln N = \log_e N$	$\lg 100 = 2$
实用结论	倒数、换底、连环对数	$\lg 2 + \lg 5 = 1$

对数与对数函数练习题

典例精析与变式训练

例 1：指数与对数的转换游戏

题目：

将下列表达式在指数形式和对数形式之间转换：

1. $\log_5 25 = 2$
2. $4^{-2} = \frac{1}{16}$

解析：

指数和对数是一对“双向翻译”的好朋友。如果 $a^b = N$ ，那么 $\log_a N = b$ 。用这个规则，我们可以轻松切换两种形式。

答案：

1. $\log_5 25 = 2 \Rightarrow 5^2 = 25$
2. $4^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{16} = -2$

变式训练 1：

将下列表达式在指数形式和对数形式之间转换：

1. $\log_7 49 = 2$
2. $2^4 = 16$

例 2：对数计算大冒险

题目：

计算下列各式的值：

1. $\log_3 81$
2. $\log_{16} \frac{1}{64}$
3. $\lg 5 + \lg 20$
4. $\log_9 \frac{1}{9} \times \log_2 \frac{1}{4}$

解析：

对数的运算就像拆礼物，先用性质拆开，再一步步算。记住：乘法变加法、除法变减法、幂次可以提出来，底数和真数得是正数哦！

答案：

1. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$
2. $\log_{16} \frac{1}{64} = \log_{16} 64^{-1} = \log_{16}(4^3)^{-1} = -\log_{16} 64 = -2$
3. $\lg 5 + \lg 20 = \lg(5 \cdot 20) = \lg 100 = 2$
4. $\log_9 \frac{1}{9} \times \log_2 \frac{1}{4} = \log_9 9^{-1} \times \log_2 2^{-2} = (-1) \times (-2) = 2$

变式训练 2：

计算下列各式的值：

1. $\log_{\frac{1}{3}} 9$
2. $\log_{64} 16$
3. $\lg 8 + \lg 25 - \lg 10$

例 3：对数性质真假辨

题目：

若 $m > 0, n > 0$ ，下列哪个等式一定正确？

A. $\ln(m + n) = \ln m + \ln n$

B. $\lg(m \cdot n) = \lg m + \lg n$

C. $\frac{\ln m}{\ln n} = \ln m - \ln n$

D. $\ln(m \cdot n) = \ln m \cdot \ln n$

解析：

对数的运算规则很挑剔：乘法可以拆成加法，除法可以拆成减法，但加减和乘积本身可不行。用这个思路逐一判断选项。

答案：

B （因为 $\lg(m \cdot n) = \lg m + \lg n$ 是对数的基本性质，其他选项均不成立）

变式训练 3：

下列哪个等式一定正确的两项是?

A. $\lg \frac{5}{6} = \lg 5 - \lg 6$

B. $\ln 12 = \ln 3 + \ln 4$

C. $\frac{\lg 9}{\lg 3} = \lg 9 - \lg 3$

D. $\lg 20 = \lg 4 \cdot \lg 5$

例 4：对数表达式变形秀

题目：

用 $\lg p, \lg q, \lg r$ 表示下列各式：

1. $\lg(pqr)$
2. $\lg \frac{p^2}{\sqrt{r}}$

解析：

对数运算就像拼积木：乘法变加法，除法变减法，幂次变成系数。一步步拆解，重新组合即可。

答案：

1. $\lg(pqr) = \lg p + \lg q + \lg r$
2. $\lg \frac{p^2}{\sqrt{r}} = \lg p^2 - \lg r^{\frac{1}{2}} = 2 \lg p - \frac{1}{2} \lg r$

变式训练 4：

若 $x > 0, y > 0$，用 $\lg x, \lg y$ 表示下列各式：

1. $\lg(x^3 y)$
2. $\lg \frac{\sqrt{x}}{y^2}$

例 5：指数运算小试牛刀

题目：

计算或化简下列各式：

1. 6^{-2}
2. 2^{3+1}
3. $b^p \cdot b^q$
4. $b^p \div b^q$
5. $(b^p)^q$

解析：

指数运算有三大法宝：同底相乘指数加、相除指数减、幂的幂指数乘。直接套公式，轻松搞定！

答案：

1. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$
2. $2^{3+1} = 2^4 = 16$
3. $b^p \cdot b^q = b^{p+q}$
4. $b^p \div b^q = b^{p-q}$
5. $(b^p)^q = b^{pq}$

变式训练 5：

计算或化简下列各式：

1. 7^{-3}
2. 4^{2-1}
3. $c^m \div c^n$

例 6：换底公式探秘

题目：

若 $\log_4 5 = p, \log_2 3 = q$ ，求 $\log_8 15$ 的值，用 p 和 q 表示。

变式训练 6：

若 $\log_5 2 = m, \log_5 7 = n$ ，求 $\log_{25} 14$ 的值，用 m 和 n 表示。

例 7：指数方程的奇妙旅程

题目：

已知 $3^m = 4^n = 12$ ，求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值。

解析：

指数方程可以用对数“解锁”。将 m 和 n 表示为对数形式，再用换底公式和运算性质求倒数之和。

答案：

$m = \log_3 12, n = \log_4 12$

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12}(3 \cdot 4) = \log_{12} 12 = 1$

变式训练 7：

已知 $2^p = 5^q = 20$ ，求 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 的值。

例 8：对数与指数的混搭派对

题目：

若 $\log_4 3 = x, \log_4 5 = y$ ，求 a^{x+y} 的值。

变式训练 8：

若 $\log_5 2 = p, \log_5 7 = q$，求 a^{p+q} 的值。

综合练习

选择题

1. 若 $x^y = z$ （$x > 0, x \neq 1$），则 $y =$
   A. $\log_x z$
   B. $\log_z x$
   C. x^z
   D. $\sqrt{z}$
2. 将 $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ 写成指数形式为
   A. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
   B. $9^{-2} = 3$
   C. $(-2)^3 = 9$
   D. $3^2 = -9$
3. 计算：$\log_5 25 \cdot \log_2 4$
   A. 2
   B. 4
   C. 1
   D. 3
4. 计算：$\frac{\log_3 8}{\log_3 2}$
   A. 2
   B.
   C. 4
   D. 6
5. 计算：$\lg 16 - \lg 4 + \lg \frac{1}{2}$
   A. 1
   B. 0
   C. lg2
   D. –1
6. 计算：$\log_3(\log_9 81 + \log_9 3)$ （X）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

7. 若 $\log_7 3 = k$，则 $\log_7 21 =$

A. $1 + k$

B. $1 - k$

C. $k - 1$

D. $\frac{1}{k}$

8. 计算：$16^{\log_4 5}$

A. 5

B. 25

C. 10

D. 4

9. 计算：$\lg 500 - \lg 5$

A. 2

B. 3

C. 100

D. 1

10. 若 $\lg 7 = m, \lg 2 = n$，则 $\lg 14 =$

A. $m + n$

B. $m - n$

C. $m \cdot n$

D. $\frac{m}{n}$

11. 若 $p > 0, q > 0$，下列哪个等式一定成立?

A. $\log_2(p \cdot q) = \log_2 p + \log_2 q$

B. $\log_2(p + q) = \log_2 p + \log_2 q$

C. $\log_2(p \cdot q) = \log_2 p \cdot \log_2 q$

D. $\frac{\log_2 p}{\log_2 q} = \log_2 p - \log_2 q$

12. 若 $\log_{10} 2 = x$，则 $\log_{10} 5 =$

A. $1 - x$

B. $1 + x$

C. $x-1$

D. $\frac{1}{x}$

13. 若 $\log_m 25=2$，则 $m=$

A. 5

B. 25

C. 10

D. 15

14. 计算： $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 8$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

15. 若 $\log_n 64=3$，则 $n=$

A. 4

B. 8

C. 16

D. 32

填空题

1. 将 $\log_6 36=2$ 写成指数式为 ________。
2. 将 $7^x=49$ 写成对数式为 ________。
3. 计算： $4^{1+\log_2 5}=$ ________。
4. 若 $\lg a=3,\lg b=4$，则 $\log_a b=$ ________。
5. 若 $\log_2[\log_m(\log_2 8)]=1$，则 $m=$ ________。
6. 若 $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 x=\log_2 15$，则 $x=$ ________。

4.2.1 答案