

## 4.2.2 对数函数拓展

# 第四章 函数的奇妙世界

## 4.2 对数函数：从指数的反击开始

### 4.2.1 对数函数是什么？

#### 官方版

对数函数是一种特殊的数学函数，它的表达式可以写成  $y = \log_a x$ 。这里的  $a$  是底数， $x$  是真数（也就是我们要“对”掉的那个数），而  $y$  是结果。简单来说，对数函数是指数函数的反函数，它回答的问题是：“底数  $a$  要乘多少次才能得到  $x$ ？”

- 条件限制：

1. 底数  $a$  必须大于 0，且不能等于 1（即  $a > 0, a \neq 1$ ）。
2. 真数  $x$  必须是正数（即  $x > 0$ ），所以定义域是  $(0, +\infty)$ 。
3. 值域是全体实数  $\mathbb{R}$ ，意味着  $y$  可以取任何值。

举个例子：

如果  $y = \log_2 8$ ，意思是“2 要乘几次才能得到 8？”答案是 3，因为  $2^3 = 8$ 。所以  $\log_2 8 = 3$ 。

#### 人话版

对数函数就是指数函数的“逆袭版”，像是数学界的侦探，专门破解“底数  $a$  到底搞了多少次幺蛾子才变成  $x$ ”。比如  $y = \log_2 8$ ，就是在问：“2 这家伙要自乘几次才能膨胀到 8？”答案是 3 次，妥妥的。

不过这家伙有点挑食：

- 底数  $a$  不能是负数或者 0，不然就没法玩了；也不能是 1，因为 1 乘多少次都是 1，侦探直接失业。
- 真数  $x$  得是正的，负数进来它就懵逼了。

定义域是  $(0, +\infty)$ ，值域是整个实数线，意思是它能查出任何“幺蛾子次数”，从负无穷到正无穷随便飞。

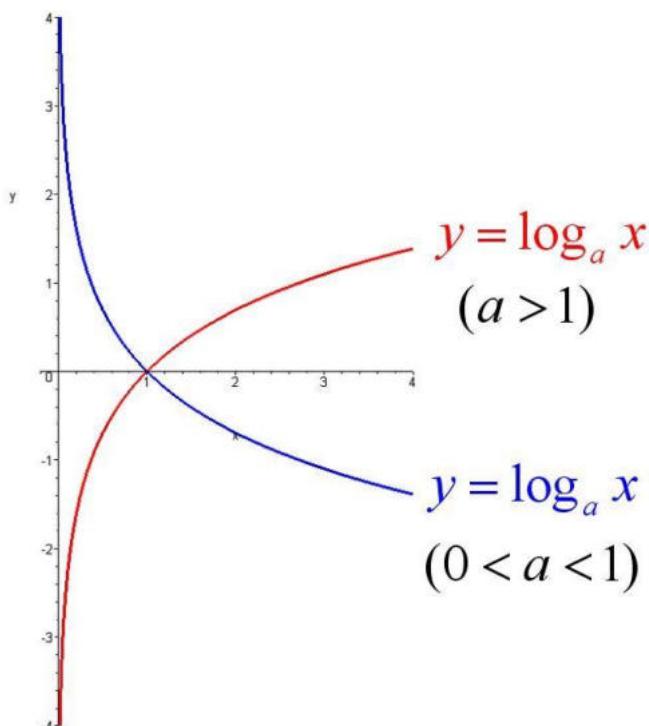
### 4.2.2 对数函数的图像长啥样？

#### 官方版

对数函数  $y = \log_a x$  的图像取决于底数  $a$  的大小，分两种情况讨论：

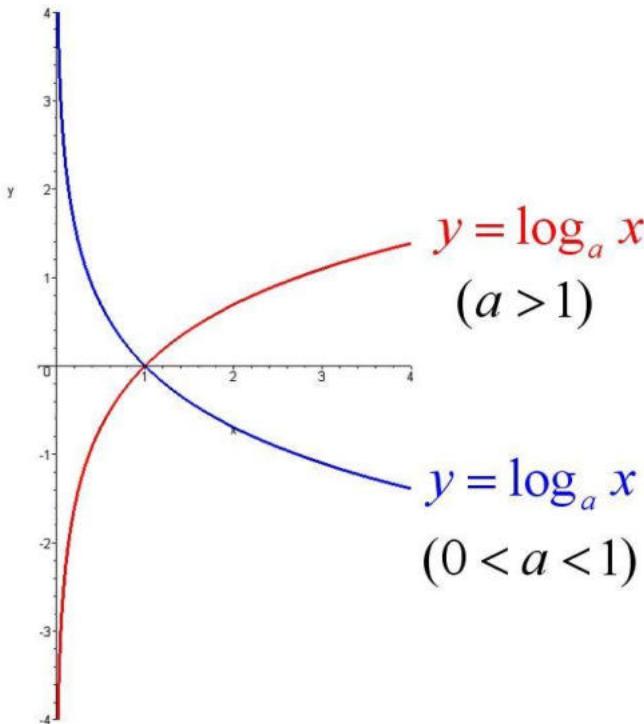
1. 当  $a > 1$  时 (比如  $a = 2, 10$ ) :

- 函数在定义域  $(0, +\infty)$  上是单调递增的。
- 当  $x = 1$  时,  $y = 0$  (因为  $a^0 = 1$  )。
- 当  $x > 1$  时,  $y > 0$  ; 当  $0 < x < 1$  时,  $y < 0$  。
- 图像从左下 (靠近  $x = 0$ ,  $y$  趋向负无穷) 缓缓上升, 经过点  $(1, 0)$ , 然后向右无限延伸。



2. 当  $0 < a < 1$  时 (比如  $a = \frac{1}{2}$ ) :

- 函数在定义域  $(0, +\infty)$  上是单调递减的。
- 当  $x = 1$  时,  $y = 0$  (同上)。
- 当  $x > 1$  时,  $y < 0$  ; 当  $0 < x < 1$  时,  $y > 0$  。
- 图像从左上 (靠近  $x = 0$ ,  $y$  趋向正无穷) 缓缓下降, 经过点  $(1, 0)$ , 然后向右无限延伸。



**建议画图：**可以用  $y = \log_2 x$  和  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  作为例子，画出两者的图像，观察它们的对称性和变化趋势。

### 人话版

对数函数的图像是个“懒洋洋的曲线”，具体长啥样得看底数  $a$  是大还是小：

1.  $a > 1$  (比如老大哥 2 或 10)：

- 这家伙是个“爬坡怪”，从左下角（靠近  $x = 0$ ,  $y$  掉到负无穷那种深渊）慢慢爬上来，经过  $(1, 0)$  这个固定小窝，然后一直往右上飘。
- $x > 1$  时，它心情好， $y$  是正的； $x$  在 0 到 1 之间时，它就 emo 了， $y$  变负数。

2.  $0 < a < 1$  (比如小弟  $\frac{1}{2}$ )：

- 这货是个“滑坡怪”，从左上角（靠近  $x = 0$ ,  $y$  高到正无穷那种得意劲）一路滑下来，经过  $(1, 0)$  这个中转站，然后往右下继续摆烂。
- $x > 1$  时，它 emo 得不行， $y$  负得一批； $x$  在 0 到 1 之间时，它反倒乐呵， $y$  是正的。

**画图提醒：**赶紧拿起笔，画个  $y = \log_2 x$  和  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，看看这俩兄弟一个爬坡一个滑坡，贼好玩！

### 4.2.3 对数函数的性质大揭秘

#### 官方版

对数函数  $y = \log_a x$  有以下重要性质：

1. **定义域和值域：** 定义域为  $(0, +\infty)$ ，值域为  $\mathbb{R}$ 。
2. **固定点：**无论  $a$  取值如何，函数图像一定经过点  $(1, 0)$ 。
3. **单调性：**

- 若  $a > 1$ ， 函数单调递增。
- 若  $0 < a < 1$ ， 函数单调递减。

#### 4. 正负性：

- $a > 1$  时，  $x > 1$  则  $y > 0$ ，  $0 < x < 1$  则  $y < 0$ 。
- $0 < a < 1$  时，  $x > 1$  则  $y < 0$ ，  $0 < x < 1$  则  $y > 0$ 。

#### 5. 对称性：函数既不是奇函数也不是偶函数，但 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 的图像关于原点对称（因为 $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$ ）。

### 人话版

对数函数的“性格”总结如下：

1. 地盘和野心：它只吃正数 ( $x > 0$ )，但结果可以随便飞 ( $y$  随便正负无穷)。

2. 老巢：不管  $a$  是啥， $(1, 0)$  永远是它的根据地，谁也抢不走。

3. 脾气：

- $a > 1$  时，它是个努力向上的好青年，越走越高。
- $0 < a < 1$  时，它就摆烂，越走越低。

4. 情绪：

- $a > 1$ ： $x > 1$  时高兴 ( $y > 0$ )， $x < 1$  时emo ( $y < 0$ )。
- $0 < a < 1$ ： $x > 1$  时emo ( $y < 0$ )， $x < 1$  时高兴 ( $y > 0$ )。

5. 怪癖：它不奇不偶，就是个怪胎。不过  $a > 1$  和  $0 < a < 1$  的图像是对称的兄弟，互相照镜子。

### 知识点总结表格

知识点	内容概述
定义	$y = \log_a x$ , $a > 0, a \neq 1$ , 定义域 $(0, +\infty)$ , 值域 $\mathbb{R}$
固定点	图像恒过 $(1, 0)$
单调性	$a > 1$ : 增函数; $0 < a < 1$ : 減函数
正负性	$a > 1$ : $x > 1, y > 0$ ; $0 < x < 1, y < 0$
	$0 < a < 1$ : $x > 1, y < 0$ ; $0 < x < 1, y > 0$
图像趋势	$a > 1$ : 左下到右上; $0 < a < 1$ : 左上到右下

#### 三 4.2.2 答案

### 4.2 对数函数练习题

## 一、典例精析

### 例 1

函数  $y = \log_5(2x + 3)$  的定义域是：

- A.  $[-1.5, +\infty)$
- B.  $(-\infty, -1.5)$
- C.  $(-1.5, +\infty)$
- D.  $[0, +\infty)$

解析：

对数函数的真数必须大于 0，因此  $2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -1.5$ ，定义域为  $(-1.5, +\infty)$ 。

答案：C

### 变式训练 1

函数  $y = \log_3(5 - 4x)$  的定义域是：

- A.  $(-\infty, \frac{5}{4})$
- B.  $[\frac{5}{4}, +\infty)$
- C.  $(-\infty, \frac{5}{4}]$
- D.  $(\frac{5}{4}, +\infty)$

---

### 例 2

“ $a > 1$ ”是“ $\log_a 10 < \log_a 12$ ”的：

- A. 充分但必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分且必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析：

当  $a > 1$  时，对数函数递增，因为  $10 < 12$ ，所以  $\log_a 10 < \log_a 12$ ；

若  $\log_a 10 < \log_a 12$ ，因为  $10 < 12$ ，函数必递增，故  $a > 1$ 。

答案：C

### 变式训练 2

“ $0 < a < 1$ ”是“ $\log_a 6 < \log_a 4$ ”的：

- A. 充分但必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分且必要条件

- D. 既不充分也不必要条件
- 

### 例 3

若  $f(x) = \log_4(x + 2)$ ，则  $f(6), f(2), f(1)$  从小到大排列正确的是：

- A.  $f(2) < f(1) < f(6)$
- B.  $f(1) < f(2) < f(6)$
- C.  $f(6) < f(2) < f(1)$
- D.  $f(2) < f(6) < f(1)$

解析：

因为  $a = 4 > 1$ ，函数递增，所以  $f(1) = \log_4 3$ ， $f(2) = 1$ ， $f(6) = \log_4 8$ ，因此  $\log_4 3 < 1 < \log_4 8$ 。

答案：B

### 变式训练 3

若  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$ ，则  $f(2), f(4), f(5)$  从小到大排列正确的是：

- A.  $f(5) < f(4) < f(2)$
  - B.  $f(2) < f(4) < f(5)$
  - C.  $f(4) < f(2) < f(5)$
  - D.  $f(2) < f(5) < f(4)$
- 

### 例 4 (修正后)

若  $\log_a 0.8 > 0$ ，则  $a$  的取值范围是：

- A.  $(0, 1)$
- B.  $(1, +\infty)$
- C.  $(0, 0.8)$
- D.  $(0.8, 1)$

解析：

当  $0 < a < 1$  时，对数函数递减，因为  $0.8 < 1$ ，所以  $\log_a 0.8 > \log_a 1 = 0$ ，取值范围为  $(0, 1)$ 。

答案：A

### 变式训练 4

若  $\log_a 0.6 < 0$ ，则  $a$  的取值范围是：

- A.  $(0, 0.6)$
- B.  $(0.6, 1)$

- C.  $(1, +\infty)$
- D.  $(0, 1)$

## 二、基础巩固

### 选择题

1. 下列哪个不是对数函数：
  - A.  $y = 2 \log_5 x$
  - B.  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
  - C.  $y = \log_e x$
  - D.  $y = \sqrt{\log_2 x}$
2. 下列函数在  $(0, +\infty)$  上是递增的：
  - A.  $y = \log_9 x$
  - B.  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$
  - C.  $y = \log_{0.7} x$
  - D.  $y = \log_{\frac{2}{3}} x$
3. 若  $\log_a 2 > \log_a 3$ ，则  $a$  的取值范围是：
  - A.  $(0, 1)$
  - B.  $(1, +\infty)$
  - C.  $(2, 3)$
  - D.  $(0, 2)$
4. 函数  $y = \log_a(x + 1)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图像一定经过的点是：
  - A.  $(0, 0)$
  - B.  $(-1, 1)$
  - C.  $(0, 1)$
  - D.  $(-1, 0)$
5. 若  $\log_a x < 0$ ，且  $a > 1$ ，则  $x$  的取值范围是：
  - A.  $(0, 1)$
  - B.  $(1, +\infty)$
  - C.  $(0, +\infty)$
  - D.  $(-\infty, 1)$
6. 下列大小关系正确的是：
  - A.  $\log_2 5 < \log_2 4$

- B.  $\log_{\frac{1}{4}} 0.2 < \log_{\frac{1}{4}} 0.3$
- C.  $\ln 3 > \ln 5$
- D.  $\log_5 6 < \log_5 7$

7. 若  $0 < a < 1$ , 下列不等式一定成立的是:

- A.  $\log_a 0.9 < \log_a 0.8$
- B.  $\log_a 2 > \log_a 3$
- C.  $a^2 > a^3$
- D.  $\log_a 0.5 > 0$

8. 对数函数  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 的图像趋势是:

- A. 从左下到右上
- B. 从左上到右下
- C. 从左下到右下
- D. 从左上到右上

9. 函数  $y = \log_{(2x-1)}(6-x)$  的定义域是:

- A.  $(0.5, 6)$
- B.  $(-\infty, 6]$
- C.  $(0.5, 1) \cup (1, 6)$
- D.  $(-\infty, 0.5) \cup (0.5, 6)$

10. 已知  $f(x) = \log_3(x-1)$ , 则  $f(10)$  和  $f(4)$  的大小关系是:

- A.  $f(10) < f(4)$
- B.  $f(10) = f(4)$
- C.  $f(10) > f(4)$
- D. 无法比较

11. 下列函数中, 定义域是全体实数的两项是:

- A.  $y = 3^x + 1$
- B.  $y = \log_2(x^2 + 1)$
- C.  $y = \log_5(x - 2)$
- D.  $y = \sqrt{\log_3 x}$

## 选择题 2

1. 函数  $y = \log_2(3x - 4) + \sqrt{x}$  的定义域是:

- A.  $[0, +\infty)$
- B.  $[\frac{4}{3}, +\infty)$

- C.  $[0, \frac{4}{3}]$
  - D.  $(-\infty, \frac{4}{3})$
2. 函数  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  在区间  $[1, 25]$  上的最大值是：
- A. 0
  - B. 1
  - C. 2
  - D. -2
3. 若  $\log_a 3 < 1$ ，则  $a$  的取值范围是：
- A.  $(0, 1) \cup (3, +\infty)$
  - B.  $(1, 3)$
  - C.  $(0, \sqrt{3})$
  - D.  $(\sqrt{3}, +\infty)$

### 解答题

1. 若  $\log_5(2x + 1) = 1$ ，则  $x = \text{_____}$ 。
2. 若  $\log_a 6 < \log_a 5$ ，则  $a$  的取值范围是  $\text{_____}$ 。
3. 若对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 经过点  $(25, 2)$ ，则  $a = \text{_____}$ 。
4. 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  在  $(0, 1)$  上的取值范围是  $\text{_____}$ 。
5. 若  $f(x) = \log_4(x + 3)$ ，则  $f(13) = \text{_____}$ 。
6. 求下列函数的定义域：
  - a.  $y = \log_{(x+1)}(5 - 2x)$
  - b.  $y = \frac{1}{\log_3(x^2 - 4)}$
7. 已知对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 经过点  $(8, 3)$ ，求  $f(\frac{1}{8})$  的值。
8. 设函数  $f(x) = \log_2(x + 1) - \log_2(1 - x)$ 。
  - a. 判断  $f(x)$  的奇偶性；
  - b. 若  $f(x) > 0$ ，求  $x$  的取值范围。