

4.2.2 对数函数拓展

第四章 函数的奇妙世界

4.2 对数函数：从指数的反击开始

4.2.1 对数函数是什么？

官方版

对数函数是一种特殊的数学函数，它的表达式可以写成 $y = \log_a x$ 。这里的 a 是底数， x 是真数（也就是我们要“对”掉的那个数），而 y 是结果。简单来说，对数函数是指数函数的反函数，它回答的问题是：“底数 a 要乘多少次才能得到 x ？”

• 条件限制：

1. 底数 a 必须大于 0，且不能等于 1（即 $a > 0, a \neq 1$ ）。
2. 真数 x 必须是正数（即 $x > 0$ ），所以定义域是 $(0, +\infty)$ 。
3. 值域是全体实数 \mathbb{R} ，意味着 y 可以取任何值。

举个例子：

如果 $y = \log_2 8$ ，意思是“2 要乘几次才能得到 8？”答案是 3，因为 $2^3 = 8$ 。所以 $\log_2 8 = 3$ 。

人话版

对数函数就是指数函数的“逆袭版”，像是数学界的侦探，专门破解“底数 a 到底搞了多少次幺蛾子才变成 x ”。比如 $y = \log_2 8$ ，就是在问：“2 这家伙要自乘几次才能膨胀到 8？”答案是 3 次，妥妥的。

不过这家伙有点挑食：

- 底数 a 不能是负数或者 0，不然就没法玩了；也不能是 1，因为 1 乘多少次都是 1，侦探直接失业。
- 真数 x 得是正的，负数进来它就懵逼了。

定义域是 $(0, +\infty)$ ，值域是整个实数线，意思是它能查出任何“幺蛾子次数”，从负无穷到正无穷随便飞。

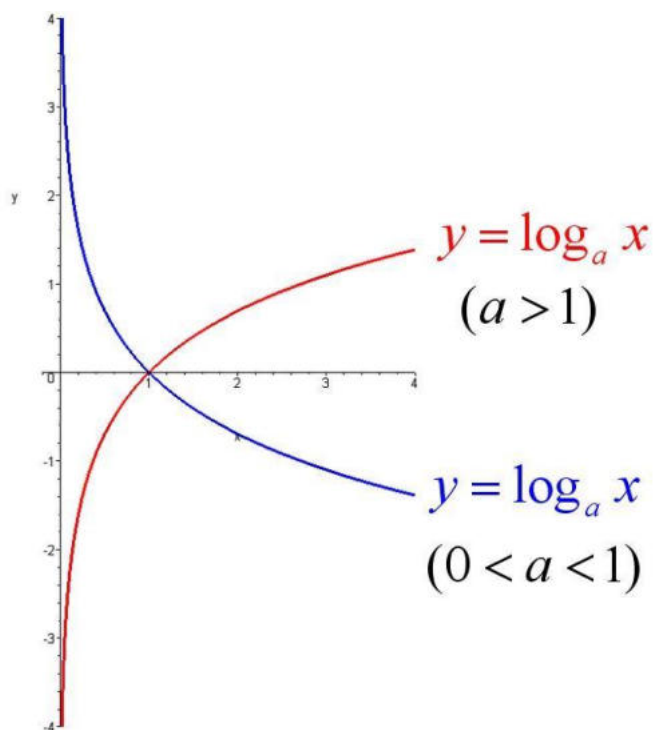
4.2.2 对数函数的图像长啥样？

官方版

对数函数 $y = \log_a x$ 的图像取决于底数 a 的大小，分两种情况讨论：

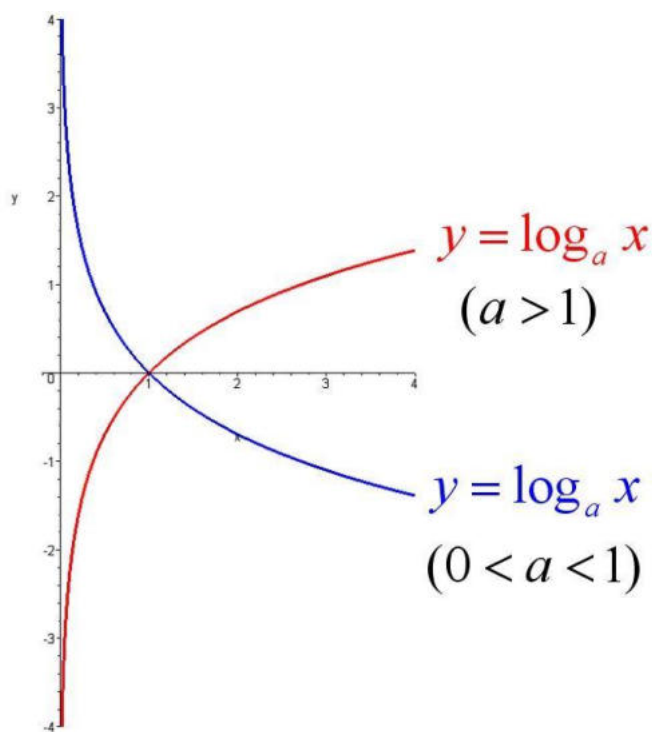
1. 当 $a > 1$ 时 (比如 $a = 2, 10$):

- 函数在定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的。
- 当 $x = 1$ 时, $y = 0$ (因为 $a^0 = 1$)。
- 当 $x > 1$ 时, $y > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$ 。
- 图像从左下 (靠近 $x = 0$, y 趋向负无穷) 缓缓上升, 经过点 $(1, 0)$, 然后向右无限延伸。



2. 当 $0 < a < 1$ 时 (比如 $a = \frac{1}{2}$):

- 函数在定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的。
- 当 $x = 1$ 时, $y = 0$ (同上)。
- 当 $x > 1$ 时, $y < 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$ 。
- 图像从左上 (靠近 $x = 0$, y 趋向正无穷) 缓缓下降, 经过点 $(1, 0)$, 然后向右无限延伸。



建议画图：可以用 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 作为例子，画出两者的图像，观察它们的对称性和变化趋势。

人话版

对数函数的图像是个“懒洋洋的曲线”，具体长啥样得看底数 a 是大还是小：

1. $a > 1$ （比如老大哥 2 或 10）：

- 这家伙是个“爬坡怪”，从左下角（靠近 $x = 0$ ， y 掉到负无穷那种深渊）慢慢爬上来，经过 $(1, 0)$ 这个固定小窝，然后一直往右上飘。
- $x > 1$ 时，它心情好， y 是正的； x 在 0 到 1 之间时，它就emo了， y 变负数。

2. $0 < a < 1$ （比如小弟 $\frac{1}{2}$ ）：

- 这货是个“滑坡怪”，从左上角（靠近 $x = 0$ ， y 高到正无穷那种得意劲）一路滑下来，经过 $(1, 0)$ 这个中转站，然后往右下继续摆烂。
- $x > 1$ 时，它emo得不行， y 负得一批； x 在 0 到 1 之间时，它反倒乐呵， y 是正的。

画图提醒：赶紧拿起笔，画个 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，看看这俩兄弟一个爬坡一个滑坡，贼好玩！

4.2.3 对数函数的性质大揭秘

官方版

对数函数 $y = \log_a x$ 有以下重要性质：

- 定义域和值域：**定义域为 $(0, +\infty)$ ，值域为 \mathbb{R} 。
- 固定点：**无论 a 取值如何，函数图像一定经过点 $(1, 0)$ 。
- 单调性：**

- 若 $a > 1$ ，函数单调递增。
- 若 $0 < a < 1$ ，函数单调递减。

4. 正负性：

- $a > 1$ 时， $x > 1$ 则 $y > 0$ ， $0 < x < 1$ 则 $y < 0$ 。
- $0 < a < 1$ 时， $x > 1$ 则 $y < 0$ ， $0 < x < 1$ 则 $y > 0$ 。

5. 对称性：函数既不是奇函数也不是偶函数，但 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 的图像关于原点对称（因为 $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$ ）。

人话版

对数函数的“性格”总结如下：

1. 地盘和野心：它只吃正数（ $x > 0$ ），但结果可以随便飞（ y 随便正负无穷）。
2. 老巢：不管 a 是啥， $(1, 0)$ 永远是它的根据地，谁也抢不走。
3. 脾气：
 - $a > 1$ 时，它是个努力向上的好青年，越走越高。
 - $0 < a < 1$ 时，它就摆烂，越走越低。
4. 情绪：
 - $a > 1$ ： $x > 1$ 时高兴（ $y > 0$ ）， $x < 1$ 时emo（ $y < 0$ ）。
 - $0 < a < 1$ ： $x > 1$ 时emo（ $y < 0$ ）， $x < 1$ 时高兴（ $y > 0$ ）。
5. 怪癖：它不奇不偶，就是个怪胎。不过 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 的图像是对称的兄弟，互相照镜子。

知识点总结表格

知识点	内容概述
定义	$y = \log_a x$ ， $a > 0, a \neq 1$ ，定义域 $(0, +\infty)$ ，值域 \mathbb{R}
固定点	图像恒过 $(1, 0)$
单调性	$a > 1$ ：增函数； $0 < a < 1$ ：减函数
正负性	$a > 1$ ： $x > 1, y > 0$ ； $0 < x < 1, y < 0$
	$0 < a < 1$ ： $x > 1, y < 0$ ； $0 < x < 1, y > 0$
图像趋势	$a > 1$ ：左下到右上； $0 < a < 1$ ：左上到右下

4.2.2 答案

4.2 对数函数练习题

一、典例精析

例 1

函数 $y = \log_5(2x + 3)$ 的定义域是：

- A. $[-1.5, +\infty)$
- B. $(-\infty, -1.5)$
- C. $(-1.5, +\infty)$
- D. $[0, +\infty)$

解析：

对数函数的真数必须大于 0，因此 $2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -1.5$ ，定义域为 $(-1.5, +\infty)$ 。

答案：C

变式训练 1

函数 $y = \log_3(5 - 4x)$ 的定义域是：

- A. $(-\infty, \frac{5}{4})$
 - B. $[\frac{5}{4}, +\infty)$
 - C. $(-\infty, \frac{5}{4}]$
 - D. $(\frac{5}{4}, +\infty)$
-

例 2

“ $a > 1$ ”是“ $\log_a 10 < \log_a 12$ ”的：

- A. 充分但不必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分且必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析：

当 $a > 1$ 时，对数函数递增，因为 $10 < 12$ ，所以 $\log_a 10 < \log_a 12$ ；

若 $\log_a 10 < \log_a 12$ ，因为 $10 < 12$ ，函数必递增，故 $a > 1$ 。

答案：C

变式训练 2

“ $0 < a < 1$ ”是“ $\log_a 6 < \log_a 4$ ”的：

- A. 充分但不必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分且必要条件

- D. 既不充分也不必要条件
-

例 3

若 $f(x) = \log_4(x+2)$ ，则 $f(6), f(2), f(1)$ 从小到大排列正确的是：

- A. $f(2) < f(1) < f(6)$
- B. $f(1) < f(2) < f(6)$
- C. $f(6) < f(2) < f(1)$
- D. $f(2) < f(6) < f(1)$

解析：

因为 $a = 4 > 1$ ，函数递增，所以 $f(1) = \log_4 3$ ， $f(2) = 1$ ， $f(6) = \log_4 8$ ，因此 $\log_4 3 < 1 < \log_4 8$ 。

答案：B

变式训练 3

若 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$ ，则 $f(2), f(4), f(5)$ 从小到大排列正确的是：

- A. $f(5) < f(4) < f(2)$
 - B. $f(2) < f(4) < f(5)$
 - C. $f(4) < f(2) < f(5)$
 - D. $f(2) < f(5) < f(4)$
-

例 4 (修正后)

若 $\log_a 0.8 > 0$ ，则 a 的取值范围是：

- A. $(0, 1)$
- B. $(1, +\infty)$
- C. $(0, 0.8)$
- D. $(0.8, 1)$

解析：

当 $0 < a < 1$ 时，对数函数递减，因为 $0.8 < 1$ ，所以 $\log_a 0.8 > \log_a 1 = 0$ ，取值范围为 $(0, 1)$ 。

答案：A

变式训练 4

若 $\log_a 0.6 < 0$ ，则 a 的取值范围是：

- A. $(0, 0.6)$
- B. $(0.6, 1)$

- C. $(1, +\infty)$
- D. $(0, 1)$

二、基础巩固

选择题

1. 下列哪个不是对数函数：

- A. $y = 2 \log_5 x$
- B. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
- C. $y = \log_e x$
- D. $y = \sqrt{\log_2 x}$

2. 下列函数在 $(0, +\infty)$ 上是递增的：

- A. $y = \log_9 x$
- B. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$
- C. $y = \log_{0.7} x$
- D. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$

3. 若 $\log_a 2 > \log_a 3$ ，则 a 的取值范围是：

- A. $(0, 1)$
- B. $(1, +\infty)$
- C. $(2, 3)$
- D. $(0, 2)$

4. 函数 $y = \log_a(x+1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像一定经过的点是：

- A. $(0, 0)$
- B. $(-1, 1)$
- C. $(0, 1)$
- D. $(-1, 0)$

5. 若 $\log_a x < 0$ ，且 $a > 1$ ，则 x 的取值范围是：

- A. $(0, 1)$
- B. $(1, +\infty)$
- C. $(0, +\infty)$
- D. $(-\infty, 1)$

6. 下列大小关系正确的是：

- A. $\log_2 5 < \log_2 4$

- B. $\log_{\frac{1}{4}} 0.2 < \log_{\frac{1}{4}} 0.3$
- C. $\ln 3 > \ln 5$
- D. $\log_5 6 < \log_5 7$

7. 若 $0 < a < 1$ ，下列不等式一定成立的是：

- A. $\log_a 0.9 < \log_a 0.8$
- B. $\log_a 2 > \log_a 3$
- C. $a^2 > a^3$
- D. $\log_a 0.5 > 0$

8. 对数函数 $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) 的图像趋势是：

- A. 从左下到右上
- B. 从左上到右下
- C. 从左下到右下
- D. 从左上到右上

9. 函数 $y = \log_{(2x-1)}(6-x)$ 的定义域是：

- A. $(0.5, 6)$
- B. $(-\infty, 6]$
- C. $(0.5, 1) \cup (1, 6)$
- D. $(-\infty, 0.5) \cup (0.5, 6)$

10. 已知 $f(x) = \log_3(x-1)$ ，则 $f(10)$ 和 $f(4)$ 的大小关系是：

- A. $f(10) < f(4)$
- B. $f(10) = f(4)$
- C. $f(10) > f(4)$
- D. 无法比较

11. 下列函数中，定义域是全体实数的两项是：

- A. $y = 3^x + 1$
- B. $y = \log_2(x^2 + 1)$
- C. $y = \log_5(x - 2)$
- D. $y = \sqrt{\log_3 x}$

选择题 2

1. 函数 $y = \log_2(3x - 4) + \sqrt{x}$ 的定义域是：

- A. $[0, +\infty)$
- B. $[\frac{4}{3}, +\infty)$

- C. $[0, \frac{4}{3}]$
- D. $(-\infty, \frac{4}{3})$

2. 函数 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 在区间 $[1, 25]$ 上的最大值是:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. -2

3. 若 $\log_a 3 < 1$, 则 a 的取值范围是:

- A. $(0, 1) \cup (3, +\infty)$
- B. $(1, 3)$
- C. $(0, \sqrt{3})$
- D. $(\sqrt{3}, +\infty)$

解答题

1. 若 $\log_5(2x+1) = 1$, 则 $x =$ _____。
2. 若 $\log_a 6 < \log_a 5$, 则 a 的取值范围是 _____。
3. 若对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 经过点 $(25, 2)$, 则 $a =$ _____。
4. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, 1)$ 上的取值范围是 _____。
5. 若 $f(x) = \log_4(x+3)$, 则 $f(13) =$ _____。
6. 求下列函数的定义域:
 - a. $y = \log_{(x+1)}(5-2x)$
 - b. $y = \frac{1}{\log_3(x^2-4)}$
7. 已知对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 经过点 $(8, 3)$, 求 $f(\frac{1}{8})$ 的值。
8. 设函数 $f(x) = \log_2(x+1) - \log_2(1-x)$ 。
 - a. 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
 - b. 若 $f(x) > 0$, 求 x 的取值范围。