5.1 数列是什么

第五章 数列探秘：从规律中发现数学的美感

5.1 数列是什么？从头到尾搞懂它！

欢迎来到数列的世界！这一节，我们将一起揭开数列的神秘面纱，从定义到分类，再到怎么玩转它的公式，带你彻底弄明白这个数学小精灵。

知识点 1：数列的定义

官方版

数列是一组按照特定顺序排列的数字序列，通常表示为 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ，我们简称为 $\{a_n\}$ 。这里的 a_n 是数列的第 n 项， n 是一个正整数，表示这个数字在序列中的位置。比如， a_1 是第一个数， a_2 是第二个数，以此类推。

简单来说，数列就像一个数字队列，每个数字老老实实按顺序站好队，等着你去分析它们的规律。

人话版

数列就是一群数字排排坐，按顺序给你看的那种东西。比如 $1, 3, 5, 7, \ldots$ 这种，前面是 1 ，后面依次是 $3, 5$ 啥的。你可以把它想象成超市里排队结账的人， a_1 是第一个倒霉蛋， a_2 是第二个， a_n 就是第 n 个挨宰的家伙。别小看这群数字，它们可是有规矩的！

知识点 2：通项公式——数列的“身份证”

官方版

通项公式是描述数列每一项 a_n 与它的位置 n 之间关系的数学表达式。换句话说，它是一个函数，输入项数 n ，就能直接算出对应的 a_n 。

例如，对于数列 $2, 4, 6, 8, \ldots$ ，我们可以发现规律并写出通项公式： $a_n = 2n$ 。这意味着第 n 项等于 2 乘以它的位置数。

通项公式的意义在于，它能让我们快速预测数列的任意一项，而不需要一项一项去数。

人话版

通项公式就是数列的终极作弊器！你有了它，就不用傻乎乎地从头数到尾。比如 $2, 4, 6, 8, \ldots$ ，一看就知道这是 $2 \times n$ ，第 100 项直接 $2 \times 100 = 200$ ，爽不爽？没这公式，你就得像个笨蛋一样数 100 次，累死你个憨憨！它就像数列的“身份证”，告诉你每个家伙长啥样。

知识点 3：递推公式——从前到后推着走

官方版

递推公式是用数列中前面的一项（或几项）来表达后面某一项的关系式。例如，假设有一个数列满足 $a_{n+1}=3a_n-2$ ，并且已知 $a_1=1$ 。那么：

- $a_2=3\times1-2=1$,
- $a_3=3\times1-2=1$,
- $a_4=3\times1-2=1$,

结果发现这是一个常数列，全是 1 。

递推公式的核心是通过已知项一步步推导出后面的项。

人话版

递推公式就是“前人栽树，后人乘凉”的玩法。给你前面几个数，告诉你咋推后面的，省得你瞎猜。比如 $a_{n+1}=3a_n-2$ ， $a_1=1$ ，你算算看， a_2 是 $3\times1-2=1$ ， a_3 也是 1 ， a_4 还是 1 ，哈哈，全是 1 ，懒人福音啊！没这招，你就像没导航的司机，开到哪算哪，累死吧你！

知识点 4：前 n 项和——从累加中找规律

官方版

数列的前 n 项和记作 S_n ，表示从第 1 项加到第 n 项的总和，即：

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

通过 S_n 与 n 的关系，可以反推出数列的通项公式：

- 当 $n=1$ 时， $a_1=S_1$,
- 当 $n\geq2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}$ 。

例如，若 $S_n=n^2$ ，则：

- $a_1=S_1=1^2=1$,
- $a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=4-1=3$,
- $a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=9-4=5$,

于是数列为 $1,3,5,\ldots$ ，通项公式为 $a_n=2n-1$ 。

人话版

前 n 项和 S_n 就是把前面 n 个家伙加起来，看看总共多重。比如 $1,3,5,7$ ，前 3 项和 $S_3=1+3+5=9$ 。更牛的是，你还能用它倒推数列咋来的：

- $S_n=n^2$ 给的线索， $S_1=1$ ， $S_2=4$ ， $S_3=9$,
- $a_1=1$ ， $a_2=4-1=3$ ， $a_3=9-4=5$,

最后发现是 $1,3,5,\ldots$ ，规律是 $2n-1$ 。

这招就像侦探破案，从总和反推每个小兵，爽歪歪啊！你不会算就等着被数学老师 diss 吧！

知识点总结表格

知识点	核心内容	举例	关键公式/特点
数列的定义	一群按顺序排列的数字	$1, 3, 5, \ldots$	记为 $\{a_n\}$
通项公式	描述 a_n 与 n 的关系	$a_n = 2n$	输入 n 直接算 a_n
递推公式	用前项推后项的关系式	$a_{n+1} = 3a_n - 2$	步步推导，省心省力
数列的分类	按项数、大小分：有穷/无穷、增/减/常数	$2, 4, 6$（递增）	认清类型，摸清脾气
前 n 项和	前 n 项总和，反推 a_n	$S_n = n^2$	$a_n = S_n - S_{n-1}$

典例精析

例 1：通项公式的应用

题目

根据给定的通项公式，求出下列数列的前 4 项。

1. $a_n = \frac{2n}{n+1}$
2. $a_n = (-2)^n$

答案

1. $a_n = \frac{2n}{n+1}$
   - $a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$
   - $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$
   - $a_3 = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
   - $a_4 = \frac{2 \cdot 4}{4+1} = \frac{8}{5}$

   前 4 项：$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}$
2. $a_n = (-2)^n$
   - $a_1 = (-2)^1 = -2$
   - $a_2 = (-2)^2 = 4$
   - $a_3 = (-2)^3 = -8$
   - $a_4 = (-2)^4 = 16$

   前 4 项：$-2, 4, -8, 16$

例 2：递推关系的计算

题目

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$，且 $a_{n+1} = a_n + 2n$。求 a_5。

答案

- $a_1 = 3$
- $a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$
- $a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 5 + 4 = 9$
- $a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15$
- $a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 = 15 + 8 = 23$

所以，$a_5 = 23$。

例 3：从数列找通项公式

题目

观察下列数列的规律，写出它们的通项公式。

1. $2, 5, 8, 11, \ldots$
2. $-3, 9, -27, 81, \ldots$

答案

1. $2, 5, 8, 11, \ldots$
   - 每项比前项多 3，第 1 项是 2。
   - 可写为 $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$

   通项公式：$a_n = 3n - 1$
2. $-3, 9, -27, 81, \ldots$
   - 每项是前项的 -3 倍，第 1 项是 -3。
   - 可写为 $a_n = -3 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$

   通项公式：$a_n = (-3)^n$

例 4：前 n 项和的应用

题目

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n - n^2$。求 a_1 和 a_4。

答案

- $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 3 - 1 = 2$
- $S_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 4 = 2$，$a_2 = S_2 - S_1 = 2 - 2 = 0$
- $S_3 = 3 \cdot 3 - 3^2 = 9 - 9 = 0$，$a_3 = S_3 - S_2 = 0 - 2 = -2$

- $S_4 = 3 \cdot 4 - 4^2 = 12 - 16 = -4$， $a_4 = S_4 - S_3 = -4 - 0 = -4$

所以， $a_1 = 2$， $a_4 = -4$。

例 5：从前 n 项和推通项公式

题目

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，求通项公式 a_n。

1. $S_n = 5n + 2$
2. $S_n = n^2 - 3n$

答案

1. $S_n = 5n + 2$
   - $a_1 = S_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$
   - $S_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$， $a_2 = S_2 - S_1 = 12 - 7 = 5$
   - $S_3 = 5 \cdot 3 + 2 = 17$， $a_3 = S_3 - S_2 = 17 - 12 = 5$
   - 规律： $a_1 = 7$，之后每项为 5。
   - 通项公式： $a_n = \begin{cases} 7, & n = 1 \\ 5, & n \geq 2 \end{cases}$ 或验证 $a_n = 5 + 2[n = 1]$ （布尔表达式）。
2. $S_n = n^2 - 3n$
   - $a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$
   - $S_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$， $a_2 = S_2 - S_1 = -2 - (-2) = 0$
   - $S_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$， $a_3 = S_3 - S_2 = 0 - (-2) = 2$
   - 通项公式： $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 3n) - ((n-1)^2 - 3(n-1)) = 2n - 4$

   所以， $a_n = 2n - 4$。

优化后的完整题目（除例题外，其他不带答案）

变式训练

变式训练 1

根据通项公式，求出下列数列的前 4 项。

1. $a_n = \frac{n}{2n-1}$
2. $a_n = 3 \cdot (-1)^n$

变式训练 2

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，且 $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$。求 a_4。

变式训练 3

观察下列数列，写出它们的通项公式。

1. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots$

变式训练 4

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 4n - 2n^2$ 。求 a_1 和 a_3 。

变式训练 5

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，求通项公式 a_n 。

1. $S_n = 3^n - 1$
2. $S_n = 2n^2 + n$

同步精练

一、选择题

1. **已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{3n}{n+2}$ ，则前 3 项是：**
   A. $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}$
   B. $1, 2, 3$
   C. $\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}$
   D. $0, 1, \frac{3}{2}$
2. **若数列 $\{a_n\}$ 的递推关系为 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n + 3$ ，则 $a_6 =$ ：**
   A. 15
   B. 17
   C. 18
   D. 20
3. **数列 $4, 7, 10, 13, \ldots$ 的通项公式是：**
   A. $a_n = 3n + 1$
   B. $a_n = 4n$
   C. $a_n = 3n - 1$
   D. $a_n = 4n - 1$
4. **已知 $S_n = n^2 + 2n$ ，则 $a_5 =$ ：**
   A. 9
   B. 10
   C. 11
   D. 12
5. **数列 $1, -2, 4, -8, \ldots$ 的第 n 项是：**

> A. $(-2)^{n-1}$
>
> B. $(-1)^n \cdot 2^{n-1}$
>
> C. 2^n

二、填空题

1. 已知 $a_n = 2n - 3$，则 $a_1 + a_2 + a_3 =$ ______。
2. 若 $a_1 = 1$， $a_{n+1} = 3a_n - 2$，则 $a_4 =$ ______。
3. 数列 $2, 6, 12, 20, \ldots$ 的通项公式为 $a_n = n(n+1)$，则 30 是第 ______ 项。
4. 已知 $S_n = 5n - n^2$，则 $a_3 =$ ______。

三、解答题

1. 已知数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots$

   求 a_5 的值；

2.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n - 2n^2$ 。求：

1. $a_2 + a_4 + a_6$ 的值；
2. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

5.1答案