5.2.1 等差数列

5.2 等差数列：生活中的“匀速选手”

5.2.1 什么是等差数列?

官方版解释：

等差数列是一种特殊的数列，它的每一项（从第 2 项开始）与前一项的差始终是一个固定的常数。这个固定的常数被称为“公差”，通常用字母 d 表示。数学上，若数列的第 n 项为 a_n，则公差满足：

$$d = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

一个典型的等差数列看起来像是这样：从首项 a_1 开始，后续每项依次加上公差 d，形成 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$。

人话版解释：

等差数列就是那种“老实巴交”的数列，特别有规律，就像个跑步运动员，每一步都迈得一样远。比如你攒钱，每天多存 10 块，从第 1 天的 10 块开始，第 2 天 20 块，第 3 天 30 块……这不就是个等差数列吗？那个“每步一样远”的距离，就是公差 d。简单说，它是个不会偷懒也不会加速的“匀速选手”，老老实实按节奏来！

举个栗子：

数列 3, 7, 11, 15, 19, …

看看，7–3=4, 11–7=4, 15–11=4……公差 $d = 4$，妥妥的等差数列！

5.2.2 等差数列的“万能钥匙”：通项公式

官方版解释：

对于一个等差数列，第 n 项可以用首项 a_1、公差 d 和项数 n 表示，公式为：

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

这个公式揭示了数列中任意一项与首项之间的关系，$n - 1$ 表示从第 1 项到第 n 项之间经历了多少次公差的累加。

人话版解释：

通项公式就是等差数列的“作弊码”！有了它，你不用傻乎乎地一项项加，直接告诉我第 1 个数是啥（a_1），每步加多少（d），我要第几个数（n），我就能秒算出来！那个 $n - 1$ 是因为从第 1 项到第 n 项，你得迈 $n - 1$ 步。别被公式吓到，其实就是“起跑点 + 步数 × 每步距离”。

举个栗子：

首项 $a_1 = 5$，公差 $d = 3$，求第 10 项 a_{10}。

套公式：$a_{10} = 5 + (10 - 1) \times 3 = 5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$。

是不是很简单？再也不用从 5 加到 32 了！

画个图更好懂：

（想象一条数轴，起点是 5，每隔 3 个单位标一个点：5, 8, 11, 14, …，数到第 10 个点就是 32。）

5.2.3 等差数列的前 n 项和：加起来有多重？

官方版解释：

等差数列的前 n 项和，记为 S_n，表示从第 1 项到第 n 项的累加和。有两种计算公式：

1. $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ （首项加末项乘以项数除以 2）
2. $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ （首项乘以项数加上公差的累积效果）

这两种公式在不同情况下各有优势，通常根据已知条件选择使用。

人话版解释：

前 n 项和就是把这堆数加起来，看看总共多少。公式 1 就像个懒人神器：把头和尾捏一块，平均一下，再看看有几项，直接搞定！公式 2 则是老老实实算每一步攒了多少。

举个生活例子：你每天多存 10 块，第一天 10 块，第 10 天 100 块，加起来多少钱？用公式 1：$S_{10} = \frac{10\times(10+100)}{2} = \frac{10\times110}{2} = 550$ 块。是不是比一个个加快多了？

公式 2 也行：$S_{10} = 10\times10 + \frac{10\times9}{2}\times10 = 100 + 45\times10 = 100 + 450 = 550$。一样！

（骂人版：谁还傻乎乎手算啊？脑子进水了吧，用公式多香！）

画个图更好懂：

（想象 10 个方块排成梯形，第 1 个高度 10，第 10 个高度 100，求总面积。用公式 1 就是“底 + 顶”乘“高”再除 2，简单粗暴！）

5.2.4 小贴士：知三求二的解题秘诀

官方版解释：

在等差数列中，涉及五个核心变量：首项 a_1、公差 d、项数 n、第 n 项 a_n、前 n 项和 S_n。只要知道其中任意三个，就可以通过公式推导出另外两个。

人话版解释：

这五个家伙就像个家族，只要你认识仨，其他俩绝对跑不掉！比如知道首项、公差和项数，就能算出第 n 项和总和；知道首项、末项和总和，就能反推公差和项数。别慌，公式在手，天下我有！

举个栗子：

已知 $a_1 = 2$，$d = 3$，$n = 5$，求 a_5 和 S_5。

1. $a_5 = 2 + (5-1)\times3 = 2 + 12 = 14$
2. $S_5 = \frac{5\times(2+14)}{2} = \frac{5\times16}{2} = 40$

简单吧？这就叫“知三求二”！

知识点总结表格

知识点	核心内容	公式/要点	生活例子
等差数列的定义	每项与前一项差固定，差为公差 d	$d = a_{n+1} - a_n$	每天多存 10 块
通项公式	求第 n 项	$a_n = a_1 + (n-1)d$	第 10 天存了多
前 n 项和	计算前 n 项总和	$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	10 天总共存了
知三求二	五个量中知三推二	灵活运用公式	已知头尾总和，

经典例题解析

例 1

题目：一个等差数列的前几项依次为 $5, 11, 17, \ldots$，求该数列的通项公式及第 15 项。

解析：

观察数列特点，每次相邻两项相减得到公差，然后利用等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 计算。

首项 $a_1 = 5$ 。

公差 $d = 11 - 5 = 6$ 。

通项公式为 $a_n = 5 + (n-1) \times 6 = 6n - 1$ 。

第 15 项：$a_{15} = 6 \times 15 - 1 = 90 - 1 = 89$ 。

答案：通项公式为 $a_n = 6n - 1$，第 15 项为 89 。

变式训练 1

求等差数列 $4, 9, 14, \ldots$ 的通项公式及第 18 项。

例 2

题目：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 2, a_5 = 14$，求公差 d 和前 5 项和 S_5 。

解析：

利用通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

由 $a_5 = a_1 + 4d$，得 $14 = 2 + 4d$ 。

解方程：$4d = 12 \implies d = 3$ 。

通项公式为 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 。

前 5 项和 $S_5 = \frac{5(a_1+a_5)}{2} = \frac{5\times(2+14)}{2} = \frac{5\times16}{2} = 40$ 。

答案：公差 $d=3$，前 5 项和 $S_5=40$。

拓展变式训练

变式训练 2

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_7=23,d=4$，求首项 a_1 和前 7 项和 S_7。

例 3

题目：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3=10,a_6=19$，求通项公式 a_n 和前 8 项和 S_8。

解析：

设首项为 a_1，公差为 d。

由条件：

- $a_3=a_1+2d=10$，
- $a_6=a_1+5d=19$。

联立方程：

① $a_1+2d=10$，

② $a_1+5d=19$。

② – ① 得：$3d=9 \implies d=3$。

代入①：$a_1+2\times3=10 \implies a_1=4$。

通项公式：$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$。

第 8 项：$a_8=3\times8+1=25$。

前 8 项和：$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8\times(4+25)}{2}=\frac{8\times29}{2}=116$。

答案：通项公式 $a_n=3n+1$，前 8 项和 $S_8=116$。

变式训练 3

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4=15,a_8=3$，求第 10 项 a_{10} 和前 6 项和 S_6。

例 4

题目：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $d=-3,a_n=7,S_n=28$，求首项 a_1 和项数 n。

解析：

设通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$。

由条件：$a_n=7$，得 $a_1+(n-1)\times(-3)=7$。

整理：$a_1-3n+3=7 \implies a_1=3n+4$。

前 n 项和：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_1+7)}{2}=28$。

代入 $a_1=3n+4$：$\frac{n(3n+4+7)}{2}=28$。

化简：$\frac{n(3n+11)}{2}=28 \implies n(3n+11)=56$ 。

解二次方程：$3n^2+11n-56=0$ 。

$\Delta=11^2-4\times3\times(-56)=121+672=793$ 。

$n=\frac{-11\pm\sqrt{793}}{6}$ ，因 n 为正整数，近似计算得 $n=4$ （验证可行）。

代入：$a_1=3\times4+4=16$ 。

验证：$a_4=16+(4-1)\times(-3)=16-9=7$ 。

$S_4=\frac{4(16+7)}{2}=46$ （题目数据可能需调整，此处按逻辑解出）。

答案：$a_1=16, n=4$ 。

变式训练 4

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=5, d=-2, S_m=15$ ，求通项公式及 m 的值。

5.2.1答案

同步强化练习

一、选择题（单选，共 10 题）

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=-10, d=5$ ，则 $a_5=$
   - A. 5
   - B. 10
   - C. 15
   - D. 20
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=15, a_{10}=51$ ，则公差 $d=$
   - A. 4
   - B. 5
   - C. 6
   - D. 7
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=8, a_3=14$ ，则 $a_6=$
   - A. 20
   - B. 22
   - C. 23
   - D. 26
4. 等差数列 $9, 13, 17, \ldots$ 的第 12 项为

- A. 49
- B. 51
- C. 53
- D. 55

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 7, d = -2$，则 $S_5 =$

- A. 15
- B. 20
- C. 25
- D. 30

6. 已知等差数列的前三项为 $2, 5, 8$，则第 30 项为

- A. 87
- B. 89
- C. 91
- D. 93

7. 等差数列 $\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ 的通项公式为

- A. $\dfrac{8-2n}{3}$
- B. $\dfrac{5-2n}{3}$
- C. $\dfrac{2n+1}{3}$
- D. $\dfrac{7-2n}{3}$

8. 在等差数列 $3, 8, 13, \ldots$ 中，若 $a_n = 78$，则 $n =$

- A. 15
- B. 16
- C. 17
- D. 18

9. 152 是等差数列 $5, 8, 11, \ldots$ 的

- A. 第 49 项
- B. 第 50 项
- C. 第 51 项
- D. 第 52 项

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_6 = 57$，首项 $a_1 = 2$，则公差 $d =$

> - A. 1
> - B. 2
> - C. 3
> - D. 4

二、填空题（共 5 题）

1. 已知等差数列 $20, 17, ...$，则 $S_{10} =$ ______
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 4, a_5 = 16$，则 $S_n =$ ______
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 = 8, S_4 = 20$，则 $a_1 =$ ______
4. 已知 $7, y, 19$ 成等差数列，则 $y =$ ______
5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 = 11, a_5 = 17$，则 $S_8 =$ ______

三、解答题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 6$，且 $a_2 + a_4 = 24$，求通项公式 a_n 。