5.3.1 等比数列

5.3 等比数列：成倍增长的数学魔法

5.3.1 等比数列的基础知识

知识点 1：什么是等比数列？

官方版解释：

等比数列是一种有规律的数列，它的特别之处在于：从第 2 项开始，每一项与它的前一项的比值始终是一个固定的非零常数。这个常数被定义为“公比”，用符号 q 表示。数学上，这个性质可以用公式表达为：

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

其中 a_n 表示数列的第 n 项，a_{n+1} 是第 $n+1$ 项，n 是正整数（$n \in \mathbb{N}^*$）。因为是除法运算，公比 q 不能为零，否则公式无意义，等比数列的每一项也必须是非零的（如果某项为零，后续项无法通过乘法定义）。

一个典型的等比数列可以写成：

$$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, \ldots$$

- a_1 是首项（第 1 项）；
- q 是公比，决定了数列的增长或衰减速度；
- 每一项都是前一项乘以 q 得到的。

例如：数列 2, 6, 18, 54… 是一个等比数列，首项 $a_1 = 2$，公比 $q = 6 \div 2 = 3$，每一项都是前一项的 3 倍。

人话版解释：

等比数列是啥？就是一群数字排队站好，从第二个开始，每个家伙跟前面的老大比一比（做除法），结果总是同一个数，这家伙就叫“公比” q。比如数列 5, 10, 20, 40…，你算算：10÷5=2，20÷10=2，40÷20=2，公比 $q = 2$！这就像你攒钱翻倍的梦想：5 块变 10 块，10 块变 20 块，多带劲儿啊！

不过有个规矩：公比 q 不能是 0，不然除法就炸了，数列直接“狗带”。而且每一项也不能是 0，不然后面也没法乘下去了。简单说，这是个“成倍放大（或缩小）”的队伍，特别有节奏感，像跳舞一样：一步两步，翻倍走起！

详细举例：

1. **正数公比（增长型）**：

> 数列：1, 3, 9, 27
>
> - $a_1 = 1$
> - $q = 3 \div 1 = 9 \div 3 = 27 \div 9 = 3$

> - 规律：每项是前一项的 3 倍。

2. **负数公比（震荡型）**：

> 数列：4, –8, 16, –32
>
> - $a_1 = 4$
> - $q = -8 \div 4 = 16 \div -8 = -32 \div 16 = -2$
> - 规律：乘以–2，正负交替，绝对值翻倍。

3. **小数公比（衰减型）**：

> 数列：16, 8, 4, 2
>
> - $a_1 = 16$
> - $q = 8 \div 16 = 4 \div 8 = 2 \div 4 = 0.5$
> - 规律：每项是前一项的一半，越来越小。

插图说明：

想象一个“细菌分裂”实验：

```markdown
时间（小时）：0     1     2     3
细菌数量：     1 → 2 → 4 → 8
公比 q = 2，每小时翻倍！
```

```markdown
图示：
[1个细菌] → [2个细菌] → [4个细菌] → [8个细菌]
```

知识点 2：等比数列的通项公式

官方版解释：

等比数列的第 n 项可以通过一个统一的公式计算：

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- a_n：第 n 项；
- a_1：首项；
- q：公比（非零）；
- $n-1$：公比的指数，表示从首项开始“乘了几次”。

这个公式的推导很简单：

- 第 1 项：a_1；
- 第 2 项：$a_2 = a_1 \cdot q$；

- 第 3 项：$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$；
- 第 4 项：$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$；
- 以此类推，第 n 项就是 a_1 乘以 q 的 $n-1$ 次方。

因为 $q \neq 0$，公式始终有效，且能准确预测任意一项的值。

人话版解释：

想知道第几项是多少？别一个个数，太蠢了！用这个神器公式：$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$。啥意思？就是从第一个数开始，拿着公比 q 使劲儿乘，乘 $n-1$ 次。比如数列 2, 6, 18, 54...，首项 $a_1 = 2$，公比 $q = 3$。

- 第 3 项：$a_3 = 2 \cdot 3^{3-1} = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$；
- 第 5 项：$a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$。

简单吧？这公式就是你的“数列遥控器”，随便跳到哪一项都行！不过记住，q 不能是 0，不然这遥控器就坏了，哈哈！

详细推导与例子：

1. **推导过程**：
   - 写出数列：$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$
   - 观察规律：第 n 项是 a_1 乘了 $n-1$ 个 q。
   - 验证：数列 5, 15, 45，$a_1 = 5$，$q = 3$，第 3 项 $a_3 = 5 \cdot 3^{3-1} = 5 \cdot 9 = 45$。
2. **负公比例子**：

   数列：10, –5, 2.5, –1.25

   - $a_1 = 10$，$q = -5 \div 10 = -0.5$
   - $a_4 = 10 \cdot (-0.5)^{4-1} = 10 \cdot (-0.5)^3 = 10 \cdot (-0.125) = -1.25$。

插图说明：

用一个“跳跃箭头”图：

```纯文本
a_1 = 3, q = 2
3 → ×2 → 6 → ×2 → 12 → ×2 → 24
公式：a_n = 3 × 2^(n-1)
```

知识点 3：等比数列的前 n 项和

官方版解释：

等比数列的前 n 项和记为 S_n，即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$。当公比 $q \neq 1$ 时，有两个等价的求和公式：

1. **首项形式**：
$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
   - q^n 是公比的 n 次方；
   - 分母 $1-q \neq 0$（因为 $q \neq 1$）。
2. **末项形式**：
$S_n = \frac{a_1-a_n \cdot q}{1-q}$
   - a_n 是第 n 项，可用通项公式求出。
     推导过程（以第一个公式为例）：

推导过程（以第一个公式为例）：

- 写出 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$；
- 两边乘以 q： $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^n$；
- 两式相减： $S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$；
- 整理： $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$；
- 两边除以 $1-q$： $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$。

特殊情况：若 $q=1$，数列变成 $a_1, a_1, a_1, \ldots$（常数列），则 $S_n = n \cdot a_1$。

应用技巧：在 a_1, q, n, a_n, S_n 中，知道任意三个量，就能解出另外两个。

人话版解释：

前 n 项加起来多少？别傻乎乎地一个个加，有公式帮你秒杀！

第一个公式：$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$。比如数列 1, 2, 4, 8，前4项和是多少？$a_1 = 1$，$q = 2$，$n = 4$：

$S_4 = \frac{1(1-2^4)}{1-2} = \frac{1(1-16)}{-1} = \frac{-15}{-1} = 15$

验算：1+2+4+8=15，没错！

第二个公式： $S_n = \frac{a_1-a_n \cdot q}{1-q}$。还是这个数列，第 4 项 $a_4 = 8$：

$$S_4 = \frac{1-8 \cdot 2}{1-2} = \frac{1-16}{-1} = \frac{-15}{-1} = 15$$

一样对！

要是 $q=1$，比如 3, 3, 3, 3，前 4 项和就是 $4 \cdot 3 = 12$，别套错公式哦傻瓜！这俩公式就像双胞胎，随便用哪个都行，关键是快！

详细例子与推导：

1. **增长型**：数列 2, 6, 18，前 3 项和：
   - $a_1 = 2$， $q = 3$， $n = 3$
   - $S_3 = \frac{2(1-3^3)}{1-3} = \frac{2(1-27)}{-2} = \frac{2 \cdot -26}{-2} = 26$
   - 验证：2+6+18=26。

2. **衰减型**：数列 16, 8, 4，前 3 项和：

> - $a_1 = 16$， $q = 0.5$， $n = 3$
> - $S_3 = \frac{16(1-0.5^3)}{1-0.5} = \frac{16(1-0.125)}{0.5} = \frac{16 \cdot 0.875}{0.5} = 28$
> - 验证：16+8+4=28。

插图说明：

用“楼梯堆积”表示：

```
纯文本

数列：1, 2, 4
S_3 = 1 + 2 + 4 = 7
楼梯：
   [4]
  [2]
 [1]
公式：S_3 = 1 × (1 - 2^3) / (1 - 2) = 7
```

总结表格：等比数列核心知识点

S_m， $S_{2m} - S_m$， $S_{3m} - S_{2m}$ 依然等比

S_2， $S_4 - S_2$， $S_6 - S_4$

S_8， $S_{16} - S_8$， $S_{24} - S_{16}$

知识点	核心内容	公式/要点	注意事项	生活例子
定义	每项除以前一项等于固定非零常数 q	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	$q \neq 0$，项不为 0	细菌分裂翻倍
通项公式	计算第 n 项	$a_n = a_1 q^{n-1}$	n 从 1 开始， $q \neq 0$	存款利息滚雪球
前 n 项和	前 n 项的总和	$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$ （$q \neq 1$）	$q = 1$ 时 $S_n = na_1$	叠纸张厚度总和

5.3.1答案

等比数列练习题

基础练习

例题

题目：

已知一个等比数列的前三项为 5, 15, 45，求该数列的通项公式及第 8 项。

【解析】

等比数列中，公比可以通过相邻两项的比值计算得出，然后利用首项和公比构造通项公式，最后代入指定项数求解。

【答案】

解：

首项为 $a_1 = 5$，计算公比 $q = \frac{15}{5} = 3$。

通项公式为 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1}$。

第 8 项为 $a_8 = 5 \cdot 3^{8-1} = 5 \cdot 3^7 = 5 \cdot 2187 = 10935$。

练习 1

题目：

已知等比数列的前三项为 4, 12, 36，求该数列的通项公式及第 7 项。

练习 2

题目：

在一个等比数列 $\{b_n\}$ 中，已知 $b_1 = 5$，前 4 项和 $S_2 = 155$，求公比 q 和第 5 项 b_5。

练习 3

题目：

在一个各项均为正数的等比数列 $\{c_n\}$ 中，已知 $c_2 = 18$，$c_5 = 486$，求首项 c_1、公比 q 和前 6 项和 S_6。

选择题

1. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5 = 81$，公比 $q = 3$，则首项 a_1 为：

   - A. 1
   - B. 3
   - C. 9
   - D. 27

2. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 7$，$a_4 = 56$，则第 6 项 a_6 为：

   - A. 112
   - B. 224
   - C. 448
   - D. 896

3. **题目：**

   在首项为 10、公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列中，第 4 项 a_4 为：

   - A. $\frac{5}{32}$
   - B. $\frac{5}{16}$
   - C. $\frac{5}{8}$
   - D. $\frac{10}{64}$

4. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 3$，$a_n = 243$，$q = 3$，则 n 为：

   - A. 4
   - B. 5
   - C. 6
   - D. 7

5. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 = 10$，$a_5 = 80$，则通项公式 a_n 为：

   - A. $5 \cdot 2^{n-1}$
   - B. $5 \cdot 2^n$
   - C. $2 \cdot 5^{n-1}$
   - D. $2 \cdot 5^n$

6. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 3$，$a_2 = 9$，则前 5 项和 S_5 为：

- A. 360
- B. 363
- C. 368
- D. 372

7. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 9$，$q = 3$，则前 4 项和 S_4 为：

   - A. 120
   - B. 360
   - C. 1080
   - D. 3240

8. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 6$，$S_3 = 42$，则公比 q 为：

   - A. 2
   - B. –3
   - C. 2 或 –3
   - D. 3 或 –3

9. **题目：**

   在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 5$，$a_6 = 160$，则前 3 项和 S_3 为：

   - A. 15
   - B. 25
   - C. 35
   - D. 45

10. **题目：**

    在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 8$，$a_1 a_2 a_3 = 64$，则：

    - A. $q = \frac{1}{2}$
    - B. $q = 2$
    - C. $q = -2$
    - D. $q = -\frac{1}{2}$

填空题

1. **题目：**

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 2$，$a_n = 128$，$q = 2$，则 $n = \_\_\_\_$。

2. **题目：**

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 7$，$q = -3$，则 $a_5 = \_\_\_\_$， $S_5 = \_\_\_\_$。

3. **题目：**

数字 25 和 100 的等比中项是 ____ 。

4. **题目：**

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$，$a_4 + a_5 + a_6 = 168$，则公比 $q = \_\_\_\_$。

5. **题目：**

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 12$，$q = 3$，则 $a_3 = \_\_\_\_$， $S_3 = \_\_\_\_$。

解答题

1. **题目：**

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知首项 $a_1 = \frac{5}{2}$，$a_n = 160$，$S_n = 317.5$，求公比 q 和 n 的值。

2. **题目：**

已知 $\{b_n\}$ 是一个等差数列，首项 $b_1 = 3$，且 b_1, b_4, b_8 成等比数列，求公差 d 及前 n 项和 S_n 。

3. **题目：**

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 4^n - 1$，求该数列的通项公式 a_n。