

6.1 角的概念推广与弧度制

角的概念推广与弧度制

欢迎来到数学的奇妙世界！今天我们要聊聊“角”的那些事儿，从基本的定义到弧度制，再到弧长和扇形面积，带你一步步玩转这个知识点！

1. 角的定义与分类

官方版

角的定义：在平面内，一条射线以其端点为中心，从一个位置旋转到另一个位置，所形成的图形叫做角。起始位置的射线称为始边，终止位置的射线称为终边，旋转的中心点称为顶点。

- **正角**：射线按逆时针方向旋转形成的角。
- **负角**：射线按顺时针方向旋转形成的角。
- **零角**：射线未发生旋转，始边与终边重合。

建议画图：画一个圆心为 O 的坐标系，始边 OA 沿 x 轴正方向，终边 OB 分别展示逆时针旋转 60° （正角）和顺时针旋转 -60° （负角），零角则始边和终边都在 x 轴正方向。



人话版

角就是一条线绕着它的起点转圈圈，转出来的形状。逆时针转是正角，顺时针转是负角，没转就是零角。想象你在玩陀螺，顺着转是正的，倒着转是负的，站那儿不动就是零——简单吧？别告诉我你连这个都搞不懂，那可得好好听课了！

2. 象限角的那些事儿

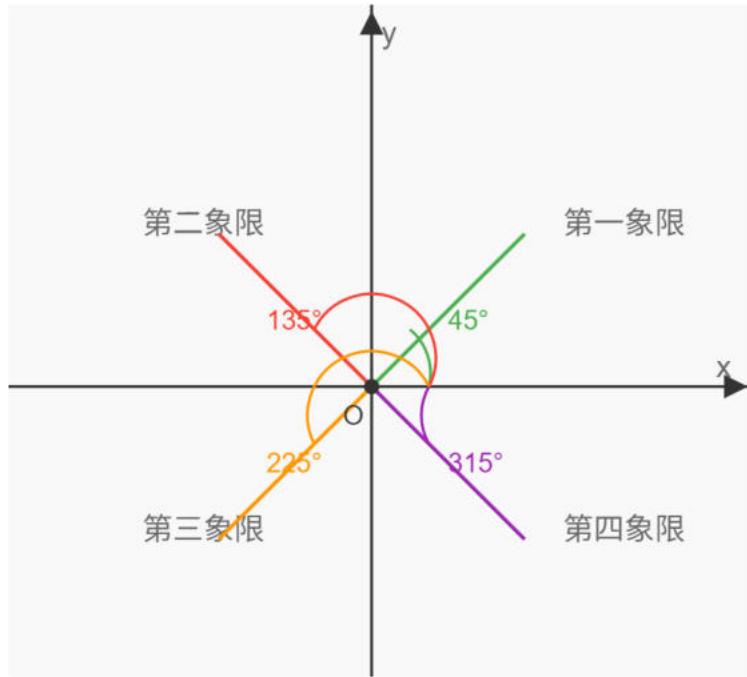
官方版

象限角：在平面直角坐标系中，角的顶点放在原点 $O(0,0)$ ，始边与 x 轴正半轴重合，终边落在了哪个象限，这个角就属于哪个象限。

- **第一象限角**：终边在第一象限 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 或加上 360° 的整数倍)。
- **第二象限角**：终边在第二象限 ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 或加上 360° 的整数倍)。

- **第三象限角**: 终边在第三象限 ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 或加上 360° 的整数倍)。
- **第四象限角**: 终边在第四象限 ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$ 或加上 360° 的整数倍)。
- **界限角**: 终边落在坐标轴上 (如 0° 、 90° 、 180° 、 270°)，不属于任何象限。

建议画图: 画一个坐标系, 标注四个象限, 始边固定在 x 轴正方向, 终边分别指向 30° (第一象限)、 120° (第二象限)、 240° (第三象限)、 300° (第四象限), 再画 90° 和 180° 作为界限角示例。



人话版

象限角就是角的终边在坐标系里指哪儿算哪儿。顶点放原点, 始边贴着 x 轴正半轴, 终边戳进哪个象限, 这角就是哪个象限的。第一象限是右上角, 第二象限是左上角, 第三象限左下角, 第四象限右下角。如果终边正好戳在坐标轴上, 那就叫界限角, 跟个中立派似的, 谁也不靠。你要是还分不清象限, 赶紧找个坐标系画画, 别在这儿犯迷糊!

3. 终边相同的角

官方版

终边相同的角: 始边相同, 终边位置一致的角称为终边相同的角。数学上, 若角 α 和 β 的终边相同, 则满足:

$$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \text{ 为整数})$$

或用弧度表示:

$$\beta = \alpha + 2k\pi \quad (k \text{ 为整数})$$

建议画图：画一个坐标系，始边在 x 轴正方向，终边指向 30° ，标注 30° 、 390° （转一圈加 360° ）、 -330° （反转一圈减 360° ），说明终边位置相同。

人话版

终边相同的角，就是不管你转了几圈，最后停在同一个地方的角。比如 30° ，你多转一圈变 390° ，再转一圈变 750° ，或者倒着转一圈变 -330° ，终边都一样。公式就是 α 加上或减去 360° 的几倍，随你转，反正终点重合就行。你要是转晕了，那就多画几遍，别在这儿瞎转悠！

4. 角的度量：角度制与弧度制

官方版

角度制：用度（ $^\circ$ ）来衡量角的大小。一个圆周 360° ，1度（ 1° ）是圆周的 $1/360$ 。

弧度制：用弧度来衡量角的大小。弧长等于半径的圆心角定义为1弧度（rad）。一个圆周是 2π 弧度。

换算关系：

- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度
- 1 弧度 $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.30^\circ$

建议画图：画一个半径为 r 的圆，标注一个弧长也为 r 的弧，对应的圆心角为 1 弧度，再画一个完整的圆周标注 2π 弧度。

人话版

角度制就是咱们常说的度，比如 90° 是个直角，谁都认识。弧度制听着高大上，其实就是拿弧长跟半径比。弧长等于半径，角就是 1 弧度，一个圆转一圈是 2π 弧度，大概 6.28。换算很简单： $180^\circ = \pi$ 弧度，所以 1° 是 $\frac{\pi}{180}$ ，1 弧度是 $\frac{180}{\pi}$ ，约等于 57.3° 。记不住？那就多算几遍，别偷懒！

5. 特殊角的度数与弧度换算

官方版

以下是常用特殊角的角度制与弧度制的对应关系：

角度（ $^\circ$ ）	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°
弧度（rad）	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$

人话版

这些角是考试常客，必须背熟！ $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ， $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ， $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ， $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ， $180^\circ = \pi$ ， $360^\circ = 2\pi$ 。背不下来？那就抄一百遍，抄到吐为止！我可不想听到你考试时说“忘了”，那可太丢人了！

6. 弧长与扇形面积公式

官方版

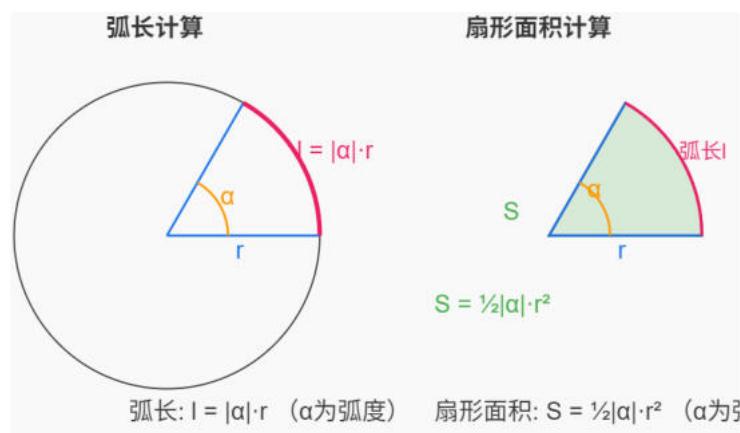
- 弧长公式:

$$l = |\alpha| \cdot r$$

- 扇形面积公式:

$$S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$$

其中, l 为弧长, r 为半径, α 为圆心角 (弧度制, 需取绝对值)。



建议画图: 画一个半径为 r 的圆, 标注一个圆心角 α , 对应的弧长为 l , 阴影部分为扇形面积 S 。

人话版

弧长 l 就是角 α (得是弧度!) 乘以半径 r 。为啥? 因为弧度本来就是 $\frac{\text{弧长}}{\text{半径}}$, 所以 $l = \alpha \cdot r$ 。扇形面积 S 是半个弧长乘半径, 代进去就是 $\frac{1}{2} \alpha r^2$ 。简单得像切披萨, 角越大, 弧越长, 扇形越大! 你要是算错了, 那可别怪我没提醒你用弧度!

知识点总结表

知识点	核心概念	公式/特点
角的定义	射线绕端点旋转形成的图形	三要素：顶点、始边、终边
角的类型	正角、负角、零角	正角：逆时针；负角：顺时针；零角：不旋转
象限角	终边所在象限决定角的类型	第一至第四象限角，界限角不属于任何象限
终边相同的角	终边位置相同的所有角	$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 或 $\beta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
角度制	以度($^\circ$)为单位的角度计量制	$1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, 一周为 360°
弧度制	以弧度(rad)为单位的角度计量制	1rad 是弧长等于半径时的圆心角，一周为 2π rad
角度与弧度换算	角度与弧度的转换关系	$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, 1 rad = $\frac{180^\circ}{\pi}$
弧长公式	角度对应的圆弧长度	$l = \alpha \cdot r$ (α 为弧度制)
扇形面积公式	角度对应的扇形面积	$S = \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2$ (α 为弧度制)

全新数学网课教材练习题

★★★ 全新数学网课教材练习题 ★★★

【典例精析】

【例 1】

在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，确定与以下各角终边相同的角，并说明它们属于第几象限。

(1) 480° (2) -300° (3) 1080°

【例 2】

完成以下角度与弧度的转换：

- (1) 将 $\frac{\pi}{6}$ 弧度转换为角度
- (2) 将 45° 转换为弧度

【例 3】

已知一个扇形的半径为 4 cm，圆心角为 90° ，计算其弧长和面积。

【变式训练】

【变式训练 1】

在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 540° 角终边相同的角是 180° ，它是界限角。

【变式训练 2】

完成以下角度和弧度的转换：

- (1) $\frac{3\pi}{4}$ 弧度 = 135° (2) $-60^\circ = -\frac{\pi}{3}$ 弧度

【变式训练 3】

已知扇形的弧长为 3π cm, 半径为 6 cm, 求圆心角 (用弧度表示) 和面积。

【练习题】

【一、选择题】(每题仅有一个正确答案)

1. -210° 属于第 _____ 象限角。
A. 一 B. 二 C. 三 D. 四
1. 下列各角中, 与 30° 终边相同且在 $0^\circ \sim 720^\circ$ 范围内的是:
A. -30° B. -330° C. 390° D. -390°
1. 下列各角中, 与 $\frac{\pi}{4}$ 终边相同且在 $0 \sim 2\pi$ 范围内的是:
A. $-\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{9\pi}{4}$
1. 时钟分针经过 15 分钟, 转过的弧度数是:
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{6}$
1. 半径为 5 cm 的扇形, 圆心角为 $\frac{2\pi}{5}$ 弧度, 其面积是:
A. 5π cm² B. 10π cm² C. 15π cm² D. 20π cm²

【二、填空题】

1. 将 45° 的终边顺时针旋转 360° , 所得角的大小为 _____。
2. 下列各角: 330° 、 -150° 、 200° 、 720° 、 90° , 分别属于第一象限角的是 _____,
第二象限角的是 _____,
第三象限角的是 _____,
第四象限角的是 _____,
界限角的是 _____。

【提示: 如某象限内无符合条件的角, 请填写“无”。】

1. 将 $\frac{7\pi}{3}$ 用角度制表示为 _____, 它是 _____ 象限角。

【三、解答题】

1. 完成以下角度和弧度的转换:
 - (1) 225°
 - (2) -270°
 - (3) $\frac{7\pi}{6}$
 - (4) $-\frac{5\pi}{3}$
1. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与以下各角终边相同的角:

(1) 600°

(2) $\frac{13\pi}{6}$

【答案】

【选择题答案】

1. 答案: B
2. 答案: C
3. 答案: C
4. 答案: A
5. 答案: A

【填空题答案】

1. 45°
2. 第一象限角: 无; 第二象限角: 无; 第三象限角: -150° 和 200° ; 第四象限角: 330° ;
界限角: 720° 和 90°
3. 420° , 第一象限

【解答题答案】

1. (1) $225^\circ \rightarrow \frac{5\pi}{4}$

(2) $-270^\circ \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$

(3) $\frac{7\pi}{6} \rightarrow 210^\circ$

(4) $-\frac{5\pi}{3} \rightarrow -300^\circ$

1. (1) $600^\circ \rightarrow 600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$

(2) $\frac{13\pi}{6} \rightarrow \frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$