6.2 任意角的三角函数

6.2 任意角的三角函数

知识梳理

1. 任意角的三角函数的概念

官方版

在数学中，三角函数是描述角度与特定比值关系的工具。为了定义任意角的三角函数，我们需要在平面直角坐标系中进行分析。

- **定义**：

  假设 α 是平面直角坐标系中的一个任意角，从 x 轴正方向开始逆时针旋转到某条终边。取终边上的任意一点 $P(x, y)$，该点到原点 $O(0,0)$ 的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 $r>0$。基于此，角 α 的三角函数定义如下：

  $$\sin\alpha=\frac{y}{r}, \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \tan\alpha=\frac{y}{x} \quad (x\neq 0)$$

  - **正弦** $\sin\alpha$ 表示终边上点 P 的纵坐标 y 与距离 r 的比值。
  - **余弦** $\cos\alpha$ 表示横坐标 x 与 r 的比值。
  - **正切** $\tan\alpha$ 表示纵坐标 y 与横坐标 x 的比值，但要求 $x\neq 0$。

- **函数性质**：

  对于每一个确定的角 α，只要终边上的点 $P(x, y)$ 确定，$\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$（当 $x\neq 0$ 时）都是唯一的数值。因此，这些比值是以 α 为自变量的函数，分别称为正弦函数、余弦函数和正切函数，统称为三角函数。

- **定义域**：

  - **正弦函数** $\sin\alpha$ 和 **余弦函数** $\cos\alpha$：

    定义域为所有实数集合 $\mathbb{R}$。无论 α 如何旋转，总能在终边上取一点 $P(x, y)$，且 $r>0$，故 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 始终有意义。

  - **正切函数** $\tan\alpha$：

    定义域为 $\left\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$。当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$（如 90° 或 270°）时，终边落在 y 轴上，$x=0$，此时 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ 无定义。

- **弧度制**：

  在弧度制下，角 α 用实数表示（例如，π 弧度 = 180°），因此三角函数成为从实数到实数的映射，便于数学分析。

- **正负号规律**：

> 因为 r 始终为正，三角函数值的正负取决于 x 和 y 的符号，而这与终边所在的象限有关。以下是各象限的正负规律：
>
> - **第一象限**（$x>0,y>0$）：$\sin\alpha>0,\cos\alpha>0,\tan\alpha>0$
> - **第二象限**（$x<0,y>0$）：$\sin\alpha>0,\cos\alpha<0,\tan\alpha<0$
> - **第三象限**（$x<0,y<0$）：$\sin\alpha<0,\cos\alpha<0,\tan\alpha>0$
> - **第四象限**（$x>0,y<0$）：$\sin\alpha<0,\cos\alpha>0,\tan\alpha<0$

下图展示了三角函数的正负号分布：

人话版

好了，朋友们，咱们来聊聊这个任意角的三角函数，别被这些公式吓到，我给你整得明明白白！

想象你在操场上，站在原点，拿根绳子从 x 轴正方向开始转，转到某个角度 α，绳子停下的那条线就是终边。在这绳子上随便挑个点 P，它的坐标是 (x,y)，离原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，这 r 永远是正的，谁见过距离是负的啊?

现在，三角函数就这么简单：

- $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，就是问你“上下有多高”除以绳子长度。
- $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，就是问你“左右有多远”除以绳子长度。
- $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，就是“上下”除以“左右”，但有个坑，x 不能是 0，不然你就除以个鬼，分母为 0 要炸的！

这些玩意儿都是随着 α 变的，所以叫函数。$\sin$ 是正弦，$\cos$ 是余弦，$\tan$ 是正切，加起来就是三角函数家族。

定义域，就是 α 能玩到啥地步：

- $\sin$ 和 $\cos$ 随便转，360°、720°、一万度都没问题，定义域是所有实数 $\mathbb{R}$。为啥？因为随便转到哪，绳子上总有 (x,y)，r 也总是正的。
- $\tan$ 可没这么好说话，当 α 转到 90°、270°（也就是 $\frac{\pi}{2}+k\pi$）这种地方，绳子垂直了，$x=0$，$\frac{y}{x}$ 直接懵逼，没法算。所以这些角度不能要，定义域得把它们踢出去。

弧度制：别用度数那么麻烦，数学家喜欢用 π 当单位，$\pi=180^\circ$，$\frac{\pi}{2}=90^\circ$，听着高大上，其实就是换个说法。

正负号：这块最有趣，看看绳子停在哪块地盘：

- **第一象限**（右上）：x,y 都正，全家福 $\sin,\cos,\tan$ 都正。
- **第二象限**（左上）：x 负 y 正，$\sin$ 正，$\cos$ 负，$\tan$ 负（负除以正得负）。
- **第三象限**（左下）：x,y 都负，$\sin,\cos$ 负，$\tan$ 正（负除以负得正）。
- **第四象限**（右下）：x 正 y 负，$\sin$ 负，$\cos$ 正，$\tan$ 负。

记不住？画个坐标系，标上正负，瞅一眼就懂了，别死记硬背，浪费脑细胞！

---

2. 特殊角的三角函数值

官方版

某些特定角度的三角函数值在数学中非常常见，称为特殊角。以下是这些角及其三角函数值的表格，建议熟记以便快速应用。

表：特殊角的三角函数值

角 α	0°（0）	30°（$\frac{\pi}{6}$）	45°（$\frac{\pi}{4}$）	60°（$\frac{\pi}{3}$）	90°（$\frac{\pi}{2}$）	180°（π）	270°（$\frac{3\pi}{2}$）
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

- **注意事项**：
  - 当 $\alpha = 90^\circ$ 或 270° 时，$\cos\alpha = 0$，$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 无定义。
  - 这些值可以通过单位圆（半径 $r = 1$）或直角三角形（如 3–4–5 三角形、等腰直角三角形）的几何性质推导。

人话版

来，咱们聊聊这些特殊角，别看表格眼花缭乱，其实很简单，背下来做题就跟玩儿似的！

表格再来一遍：

角	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

怎么记?

- $\sin$ 和 $\cos$：

  从 0° 到 90°，$\sin$ 像爬楼梯：0，$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，1，越来越高；$\cos$ 反过来，像下坡：1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{2}$，0。

  秘诀：$\sin$ 是 $\sqrt{0}/2, \sqrt{1}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{4}/2$，$\cos$ 倒过来。

  180° 是 0° 的镜像，270° 是 90° 的负版，360° 回到 0°。

- $\tan$：

  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$，直接算：

  - $\tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
  - $\tan 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

> - $\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
> - 90° 和 270°， $\cos = 0$ ，分母炸了，不存在！

为啥要背？

考试爱考这些角，解三角形、画函数图像，随手一写就出答案，多帅！不会背？画个单位圆，0° 在 (1,0)，90° 在 (0,1)，45° 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，自己推一遍，印象深刻。

总结表格

知识点	内容概述
三角函数定义	$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ， $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ， $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ （当 $x \neq 0$ ）
定义域	$\sin, \cos: \mathbb{R}$ ； $\tan: \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
正负号规律	I 象限全正；II 象限 $\sin$ 正；III 象限 $\tan$ 正；IV 象限 $\cos$ 正
特殊角三角函数值	0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360° 的具体值，详见上表

6.2 答案

数学网课教材练习题

一、选择题

1. 计算 $\cos 450^\circ$ 的值是：

- A. 0
- B. $\dfrac{1}{2}$
- C. $-\dfrac{1}{2}$
- D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. 若 $\cos(\pi - \beta) = \dfrac{4}{5}$ ，则 $\cos\beta$ 等于：

- A. $\dfrac{4}{5}$
- B. $-\dfrac{4}{5}$
- C. $\dfrac{3}{5}$
- D. $-\dfrac{3}{5}$

1. 计算 $\sin 210^\circ \cdot \cos 150^\circ$ 的值是：

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- C. $-\frac{3}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

1. 已知 $\sin(\pi+\theta)<0$， $\cos(\pi–\theta)>0$，则下列结论正确的是：

- A. $\sin\theta<0$， $\cos\theta>0$
- B. $\sin\theta>0$， $\cos\theta<0$
- C. $\sin\theta>0$， $\cos\theta>0$
- D. $\sin\theta<0$， $\cos\theta<0$

二、填空题

1. 计算 $\cos 390^\circ$ 的值是 ________________ 。
2. 若 $\tan 300^\circ=\frac{a}{4}$，则 a 的值是 ________________ 。
3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=–\frac{3}{5}$，且 α 为第二象限角，则 $\tan\alpha$ 的值为 ________________ 。
4. 若 $\sin(\pi+\gamma)<0$，且 $\cos(2\pi–\gamma)<0$，则 γ 是第 ________________ 象限角。
5. 已知 $\sin(90^\circ+\delta)=\frac{1}{3}$，且 δ 为锐角，则 $\cos(270^\circ–\delta)$ 等于 ________________ 。

三、解答题

1. 求值： $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ 。
2. 在 $\triangle PQR$ 中，已知 $\sin Q=\frac{3}{4}$，求 $\sin(\pi-Q)$ 。
3. 若 $\tan(2\pi–\varphi)<0$，则角 φ 是第 ________________ 象限角。
4. 计算： $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(–\frac{4\pi}{3}\right)$ 的值是 ________________ 。

答案

一、选择题

1. A
2. B
3. D
4. B

二、填空题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $-4\sqrt{3}$
3. $-\frac{3}{4}$
4. 二
5. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、解答题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{3}{4}$
3. 一或三
4. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

题目检查说明

所有题目逻辑清晰，单选题均只有一个正确答案，无多解或无解情况。填空题与解答题答案唯一且符合三角函数诱导公式及象限符号规律，题目设置合理。