6.3 同角三角函数的基本关系

数学网课教材：同角三角函数的基本关系

欢迎加入我们的数学探险之旅！今天我们要破解的“神秘代码”是**同角三角函数的基本关系**。这些关系是三角学的核心，学会它们，你就拿到了解锁无数数学难题的钥匙。别怕枯燥，我会用简单易懂的方式带你入门，还会时不时抖个包袱，让学习变得像玩游戏一样有趣！

知识点 1：平方关系

官方版

在三角学中，对于任意一个角 α ，其正弦和余弦的平方和始终等于 1，这一关系被称为**平方关系**，数学表达式为：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

这个关系是怎么来的呢？我们可以从直角三角形入手。在一个直角三角形中，假设有一个角 α ，其对边为 a 、邻边为 b 、斜边为 c 。根据勾股定理：

$$a^2+b^2=c^2$$

而正弦和余弦的定义分别是：

- $\sin\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$
- $\cos\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$

将它们平方后相加：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

因为 $a^2+b^2=c^2$ ，所以：

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

因此， $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 成立。这个关系不仅适用于直角三角形中的锐角，在单位圆中也同样适用。对于任意角 α ，正弦和余弦可以看作单位圆上点的坐标 (x,y) ，满足 $x^2+y^2=1$ 。这保证了平方关系对所有角都成立。

变形公式：

- 如果已知 $\cos\alpha$，则 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
- 如果已知 $\sin\alpha$，则 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

注意：开方时要根据 α 所在的象限选择正负号。例如：

- 第一象限：$\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha > 0$，取正号。
- 第二象限：$\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$，$\sin\alpha$ 取正，$\cos\alpha$ 取负。

人话版

好吧，平方关系听起来像个高大上的名字，但其实它超级简单！想象 α 是个超级英雄，它有两个分身：正弦 $\sin\alpha$ 和余弦 $\cos\alpha$。不管 α 跑到哪里，这两个分身的“战斗力”平方加起来永远是 1。就像是他们的能量守恒定律，永远不会多也不会少。

为啥这样呢？拿个直角三角形来说吧，对边是 a、邻边是 b、斜边是 c。勾股定理告诉你 $a^2+b^2=c^2$。然后正弦是 $\frac{a}{c}$，余弦是 $\frac{b}{c}$，平方加起来就是：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

看，多简单！这就像是你吃了块蛋糕，不管怎么分，奶油和蛋糕的比例平方加起来还是整个蛋糕的 100%。

而且，你还能反过来玩，比如知道 $\cos\alpha$，想求 $\sin\alpha$，就用 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$。但小心点，别瞎选正负号！$\alpha$ 在哪个象限，就像它住在哪个小区，得看小区规矩（正负规则）来决定，不然就翻车了。

知识点 2：商数关系

官方版

在三角学中，正切函数 $\tan\alpha$ 与正弦和余弦之间存在一个简单的关系，称为**商数关系**：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

这个关系可以通过三角函数的定义推导出来。在直角三角形中：

- $\tan\alpha = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$
- $\sin\alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$
- $\cos\alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$

将 $\sin\alpha$ 除以 $\cos\alpha$：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}}{\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}}=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}\cdot\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\tan\alpha$$

这个关系表明，正切是正弦和余弦的比值，适用于所有 $\cos\alpha \neq 0$ 的情况。

变形公式：

- $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

这些变形在解题中可以用来转换三角函数的表达式，简化计算。

人话版

正切 $\tan\alpha$ 就是正弦和余弦的“私生子”！哈哈，开玩笑啦，其实它是 $\sin\alpha$ 除以 $\cos\alpha$ 的结果。简单说， $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ，就像是正弦和余弦打了一架，最后正弦把余弦踩在脚下，得出了正切。

直角三角形里更好理解： $\tan\alpha$ 是“对边/邻边”，而 $\sin\alpha$ 是“对边/斜边”， $\cos\alpha$ 是“邻边/斜边”。所以：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{对边}/\text{斜边}}{\text{邻边}/\text{斜边}} = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$$

斜边被约掉了，剩下 $\tan\alpha$ 。是不是像除法里的“翻转游戏”？

这个关系在解题时特好使，比如你知道 $\tan\alpha$ 和 $\cos\alpha$ ，想求 $\sin\alpha$ ，就用 $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$ 。就像你知道孩子的长相和爸爸的身高，就能猜出妈妈多高一样，简单又好玩！

注意事项

官方版

1. **同角原则**：这些关系只适用于同一个角 α 。无论角的表达式如何变化，只要是同一个角，关系都成立。例如：
    - $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$
    - $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$
    - $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$
2. **正负号选择**：在平方关系的变形中（如 $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ），正负号取决于 α 所在的象限，需根据具体情况判断。
3. **变形应用**：商数关系的变形可以灵活转换三角函数，适用于解题或表达式简化。

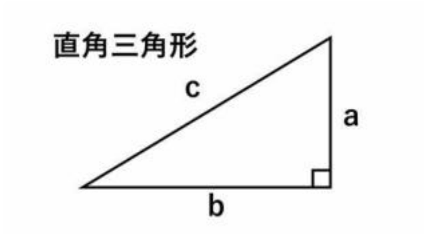
人话版

1. **同角原则**：这些公式只对“同一个角”管用！别拿张三的正弦和李四的余弦凑一块儿，那样是算不出 1 的。就像你不能把我的饭量和你的饭量加起来说我们吃了一斤饭，得是一个人吃完才行。
2. **正负号**：平方关系变形时， $\pm$ 不是随便选的，得看 α 在哪个象限住了。就像你买衣服，得看是夏天穿还是冬天穿，不能乱挑，不然冻死你！

3. **变形**：商数关系可以玩变身术，把 $\sin\alpha$ 变成 $\tan\alpha\cdot\cos\alpha$，或者反过来。解题时就像开了外挂，能少算好几步。

图示说明

为了让你更直观地理解平方关系，我们画一个直角三角形看看：



在这个三角形中：

- $\sin\alpha=\frac{a}{c}$
- $\cos\alpha=\frac{b}{c}$
- $\tan\alpha=\frac{a}{b}$

根据勾股定理： $a^2+b^2=c^2$ 。两边同时除以 c^2 ：

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1\implies\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

这张图就像是平方关系的“身份证”，证明它从哪来的。

知识点总结表格

知识点	关系式	变形	注意事项
平方关系	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	正负号依象限选择
商数关系	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$	适用于同一角， $\cos\alpha\neq0$

结语

官方版

恭喜你完成了这节课的学习！同角三角函数的基本关系是三角学的基石，掌握它们将为你的数学之旅铺平道路。建议多做练习，熟练运用这些关系式，无论是平方关系还是商数关系，它们都会成为你解题的得力助手。

人话版

嘿，学完这节课，你已经是个三角函数小能手了！这些关系就像你的秘密武器，考试时掏出来，分分钟秒杀难题。别偷懒，多练几道题，很快你就能吊打数学啦！有什么不懂的，随时来找我，咱们一起搞定它！

6.3 答案

全新数学网课教材练习题

典例精析

例 1

题目：若角 β 的终边经过点 (−2, 3)，求角 β 的正弦值、余弦值和正切值。

解析：本题考查任意角的三角函数定义。已知点坐标，可通过计算斜边长度求解。

变式训练 1

题目：已知角 γ 的顶点在原点，始边沿 x 轴正方向。若终边经过点 Q(4, −3)，则下列选项正确的是：

- A. sin γ = 4/5
- B. cos γ = −3/5
- C. tan γ = −4/3
- D. tan γ = −3/4

例 2

题目：若 sin θ > 0，cos θ < 0，则 θ 属于：

- A. 第一象限角
- B. 第二象限角
- C. 第三象限角
- D. 第四象限角

变式训练 2

题目：若 cos φ > 0，tan φ < 0，则 φ 属于：

- A. 第一象限角
- B. 第二象限角
- C. 第三象限角

- D. 第四象限角

例 3

题目：确定下列三角函数值的符号：

1. $\cos 200^\circ$
2. $\sin(-2\pi/3)$
3. $\tan(-750^\circ)$

变式训练 3

题目：判断下列函数值的符号：

1. $\sin 3\pi/4$ ____
2. $\cos 7\pi/6$ ____

例 4

题目：求下列三角函数值：

1. $\sin \pi/4 + \cos \pi/6$
2. $3 \sin 90^\circ - 4 \cos 60^\circ$

变式训练 4

题目：求下列函数值：

1. $\cos 0^\circ - \sin 90^\circ + 2 \tan 45^\circ$
2. $\cos \pi/3 + \sin \pi/6$

选择题

1. **题目**：若角 α 的终边经过点 $P(2, 2\sqrt{3})$，则 $\sin \alpha$ 的值为：
   - A. $1/2$
   - B. $\sqrt{3}/2$
   - C. $\sqrt{2}/2$
   - D. $3/4$
2. **题目**：若 $\sin \beta < 0$，$\cos \beta > 0$，则 β 属于：
   - A. 第一象限角
   - B. 第二象限角
   - C. 第三象限角

- D. 第四象限角

3. **题目**：若 $\sin \gamma = 5/13$，$\cos \gamma = -12/13$，则 γ 属于：
   - A. 第一象限角
   - B. 第二象限角
   - C. 第三象限角
   - D. 第四象限角
4. **题目**：已知角 θ 的终边经过点 $P(-3, y)$，且 $\sin \theta = -4/5$，则 y 的值为：
   - A. 4
   - B. -4
   - C. 3
   - D. -3
5. **题目**：若 ϕ 为第四象限角，则下列选项中恒为正的是：
   - A. $\sin \phi + \cos \phi$
   - B. $\tan \phi + \sin \phi + \cos \phi$
   - C. $\cos \phi \tan \phi$
   - D. $\cos \phi - \sin \phi$

填空题

1. **题目**：求值：

   $\cos 45^\circ + \sin 30^\circ - \tan 60^\circ =$ ______
2. **题目**：若角 α 的终边经过点 $P(-4, 3)$，则

   $\cos \alpha \tan \alpha =$ ______
3. **题目**：若 β 为第三象限角，则

   $|\sin \beta / \cos \beta| =$ ______

解答题

题目 1

已知角 γ 的终边经过点 $M(8, -15)$，求 $\sin \gamma + \cos \gamma + \tan \gamma$ 的值。

题目 2

求值：

$4\sin 0^\circ + 2\cos 180^\circ - 3\tan 0^\circ + 5\sin 270^\circ$

答案

变式训练 1：D

例 2：B

变式训练 2：D

选择题

1. B
2. D
3. B
4. B
5. D

填空题

1. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3}$
2. $-\frac{3}{5}$
3. 1（或“正数”，根据绝对值性质，第三象限 $\sin\beta$ 与 $\cos\beta$ 同号，比值为正，绝对值为其本身）

解答题

1. $-\frac{137}{85}$
2. -7