6.4 诱导公式：破解任意角三角函数的终极秘籍

6.4 诱导公式：破解任意角三角函数的终极秘籍

三角函数的世界里，角度可不只是老老实实待在 0° 到 90° 的舒适区。660°、−120°、$\frac{7\pi}{6}$ 这些“怪角”一出现，没个趁手的工具还真有点慌。不过别怕，**诱导公式**就是你的“数学魔法棒”，能把任何奇形怪状的角变成熟悉的锐角三角函数值。这节课，我们就来把这个魔法拆开揉碎，彻底学会它！

知识点 1：周期旋转的秘密 $\alpha + k \cdot 360^\circ$

官方版

核心概念

在单位圆中，一个角 α 如果加上整数倍的 360°（即 $k \cdot 360^\circ$，$k \in \mathbb{Z}$），它的终边会完整地绕圈回到原来的位置。因为三角函数值只取决于终边的位置，所以：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin\alpha,\\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos\alpha,\\ \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan\alpha.\end{aligned}$$

用弧度制，360° 等于 2π，公式变成：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha,\\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha,\\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan\alpha.\end{aligned}$$

推导过程

1. 单位圆上，$\sin\alpha$ 是终边的 y 坐标，$\cos\alpha$ 是 x 坐标。
2. 转一圈 360°（或 2π），终边回到原点，x 和 y 不变。
3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，分子分母不变，值也一样。
4. 多转几圈（k 次），结果依然如此。

图解

纯文本

```
y轴
 |         α
 |----->
 |         360°后又回到α
 |----->
 O----------------> x轴
终边位置不变，三角函数值也不变！
```

示例

求 $\sin 420^\circ$：

- $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ （$k = 1$），
- $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$。

小贴士：默认 α 是锐角（0° 到 90°），方便后续符号判断。

人话版

直白解释

这公式就是告诉你：角转圈圈没啥用！转 360° 就像你绕着操场跑了一圈，气喘吁吁回到起点，位置没变。三角函数也懒得变，$\sin$、$\cos$、$\tan$ 还是老样子。转两圈（720°）、三圈（1080°），随便转，值都不改！

生活比喻

想象你坐旋转木马，转了一圈又一圈，风景还是那个风景，心情还是那个心情，三角函数也是这么“固执”。

示例拆解

拿 $\sin 420^\circ$ 举例：

- 420° 比 360° 多 60°，就像你跑了一圈还多跑了 60 米，
- 多跑的那圈没用，直接看 60°，$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，搞定！

吐槽时间

这公式也太懒了吧，转了半天啥也没变，数学家发明它就是为了偷懒吗？不过对我们来说，真是省心又省力！

知识点 2：负角的“反向操作” $-\alpha$

官方版

核心概念

把角 α 变成 $-\alpha$，终边会绕着原点逆时针变成顺时针对称，影响三角函数值：

$$
\begin{aligned}
&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\\
&\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\\
&\tan(-\alpha) = -\tan\alpha.
\end{aligned}
$$

推导过程

1. 在单位圆中， $\sin\alpha$ 是 y 坐标， α 在第一象限时 y 为正， $-\alpha$ 在第四象限时 y 为负，所以 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 。
2. $\cos\alpha$ 是 x 坐标， α 和 $-\alpha$ 的 x 坐标相同（左右对称），所以 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ 。
3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ， $\sin$ 变负， $\cos$ 不变， $\tan$ 也变负。

图解

```Markdown
y轴
 |    α（第一象限）
 |----->
 |
 |--------> -α（第四象限）
 O---------------> x轴
y坐标反向，x坐标不变！
```

示例

求 $\sin(-30^\circ)$：

- $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ 。

人话版

直白解释

负角就是“反着走”！本来 α 是向上爬（ $\sin$ 正），现在 $-\alpha$ 向下掉（ $\sin$ 负），但左右位置（ $\cos$ ）没变， $\tan$ 跟着 $\sin$ 一起翻脸。

生活比喻

就像你走路，本来朝前（正方向），现在倒着退（负方向），高度变了（上变下），但左右还是那个左右。

示例拆解

$\sin(-30^\circ)$：

- 30° 的正弦是 $\frac{1}{2}$ ，反过来就是 $-\frac{1}{2}$ ，简单粗暴！
- $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，懒得变！
- $\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，跟着翻。

搞笑版

$\sin$ 是胆小鬼，一反向就吓得变负， $\cos$ 是硬汉，死活不改， $\tan$ 就是墙头草，见风使舵！

知识点 3：180° 的“镜像魔法” $180^\circ-\alpha$ 和 $180^\circ+\alpha$

官方版

$180^\circ-\alpha$

终边翻到第二象限：

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ-\alpha)&=\sin\alpha,\\ \cos(180^\circ-\alpha)&=-\cos\alpha,\\ \tan(180^\circ-\alpha)&=-\tan\alpha.\end{aligned}$$

推导

1. $\sin(180^\circ-\alpha)$：y 坐标与 $\sin\alpha$ 相同（第二象限 y 仍正）。
2. $\cos(180^\circ-\alpha)$：x 坐标反向（第二象限 x 负）。
3. $\tan=\frac{\sin}{\cos}$，符号变负。

$180^\circ+\alpha$

终边翻到第三象限：

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ+\alpha)&=-\sin\alpha,\\ \cos(180^\circ+\alpha)&=-\cos\alpha,\\ \tan(180^\circ+\alpha)&=\tan\alpha.\end{aligned}$$

推导

1. $\sin(180^\circ+\alpha)$：y 坐标反向（第三象限 y 负）。
2. $\cos(180^\circ+\alpha)$：x 坐标反向（第三象限 x 负）。
3. $\tan$：分子分母同负，抵消变正。

图解

```Markdown
y轴
 |    α       180°-α
 |-----> <------
 |
 |--------> 180°+α
 O----------------> x轴
象限决定符号！
```

示例

- $\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin150^\circ=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，
- $\cos(180^\circ+45^\circ)=\cos225^\circ=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

人话版

$180^\circ - \alpha$

这就像对着镜子翻，高度（sin）没变，但左右（cos）反了， tan 跟着变负。

比喻：你挥右手，镜子里是左手，姿势一样但方向相反。

$180^\circ + \alpha$

再翻一下到第三象限，高度和左右全反， sin 和 cos 都变负， tan 却“厚脸皮”地变回来了。

比喻：你跳到对面，上下左右全变，唯独态度（tan）还是那么倔！

示例拆解

- $\sin 150^\circ$： 150° = 180° − 30°， sin 不变， $\frac{1}{2}$。
- $\cos 225^\circ$： 225° = 180° + 45°， cos 变负， $-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

吐槽版

这角翻来翻去跟杂技团似的， tan 还挺会随机应变，真是“见人说人话，见鬼说鬼话”！

知识点 4：90° 的“角色互换” $90^\circ \pm \alpha$

官方版

核心公式

$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha.$$

- $90^\circ + \alpha$（第二象限）： $\sin = \cos\alpha$， $\cos = -\sin\alpha$，
- $90^\circ - \alpha$（第一象限）： $\sin = \cos\alpha$， $\cos = \sin\alpha$.

推导

1. $90^\circ - \alpha$： 终边在第一象限， sin 变 cos， cos 变 sin， 全正。
2. $90^\circ + \alpha$： 终边在第二象限， cos 变负。

图解

纯文本

```
y轴
 |   90°-α
 |----->
 |  α
 |--------> 90°+α
 O----------------> x轴
sin 和 cos 换身份！
```

示例

- $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，
- $\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$。

人话版

直白解释

这就像 $\sin$ 和 $\cos$ 玩“变装游戏”！ $\sin$ 穿 $\cos$ 的衣服， $\cos$ 穿 $\sin$ 的衣服， $90^\circ - \alpha$ 全正， $90^\circ + \alpha$ 的 $\cos$ 变负。

生活比喻

你和朋友互换衣服，你穿他的外套（$\sin$ 变 $\cos$），他穿你的毛帽（$\cos$ 变 $\sin$），但天气冷了（第二象限），他得加个负号保暖。

示例拆解

- $\sin 120^\circ$：120° = 90° + 30°， $\sin$ 变 $\cos$， $\frac{\sqrt{3}}{2}$，
- $\cos 60^\circ$：60° = 90° − 30°， $\cos$ 变 $\sin$， $\frac{1}{2}$。

搞笑版

$\sin$ 和 $\cos$ 互换角色，导演还喊“加点负号增加戏剧性”， $\cos$ 估计心里苦：凭啥老是我变负！

总结表格：诱导公式超级详解

角的变化	sin	cos	tan	象限	规律
$\alpha + k \cdot 360^\circ$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	不变	转圈不改值
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	第四	反向， $\sin$ 变负
$180^\circ - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	第二	$\cos$ 变负
$180^\circ + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	第三	全反， $\tan$ 恢复
$90^\circ + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	第二	互换， $\cos$ 负
$90^\circ - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	第一	互换，全正

6.4 答案

以下是重新排版后的数学网课教材练习题，格式更加美观清晰：

数学网课教材练习题

一、选择题

1. 计算 $\cos 450^\circ$ 的值是：

- A. 0
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. 若 $\cos(\pi – \beta) = \frac{4}{5}$，则 $\cos\beta$ 等于：

- A. $\frac{4}{5}$
- B. $-\frac{4}{5}$
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $-\frac{3}{5}$

1. 计算 $\sin 210^\circ \cdot \cos 150^\circ$ 的值是：

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- C. $-\frac{3}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

1. 已知 $\sin(\pi + \theta) < 0$，$\cos(\pi – \theta) > 0$，则下列结论正确的是：

- A. $\sin\theta < 0$，$\cos\theta > 0$
- B. $\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$
- C. $\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$
- D. $\sin\theta < 0$，$\cos\theta < 0$

二、填空题

1. 计算 $\cos 390^\circ$ 的值是 ________________。
2. 若 $\tan 300^\circ = \frac{a}{4}$，则 a 的值是 ________________。
3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = –\frac{3}{5}$，且 α 为第二象限角，则 $\tan\alpha$ 的值为 ________________。
4. 若 $\sin(\pi + \gamma) < 0$，且 $\cos(2\pi – \gamma) < 0$，则 γ 是第 ________________ 象限角。
5. 已知 $\sin(90^\circ + \delta) = \frac{1}{3}$，且 δ 为锐角，则 $\cos(270^\circ – \delta)$ 等于 ________________。

三、解答题

1. 求值：$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$。
2. 在 $\triangle PQR$ 中，已知 $\sin Q=\frac{3}{4}$，求 $\sin(\pi-Q)$。
3. 若 $\tan(2\pi-\varphi)<0$，则角 φ 是第 ________ 象限角。
4. 计算：$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ 的值是 ________。

答案

一、选择题

1. A
2. B
3. D
4. B

二、填空题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $-4\sqrt{3}$
3. $-\frac{3}{4}$
4. 二
5. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、解答题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{3}{4}$
3. 一或三
4. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$