

6.4 诱导公式：破解任意角三角函数的终极秘籍

6.4 诱导公式：破解任意角三角函数的终极秘籍

三角函数的世界里，角度可不只是老老实实待在 0° 到 90° 的舒适区。 660° 、 -120° 、 $\frac{7\pi}{6}$ 这些“怪角”一出现，没个趁手的工具还真有点慌。不过别怕，**诱导公式**就是你的“数学魔法棒”，能把任何奇形怪状的角变成熟悉的锐角三角函数值。这节课，我们就来把这个魔法拆开揉碎，彻底学会它！

知识点 1：周期旋转的秘密 $\alpha + k \cdot 360^\circ$

官方版

核心概念

在单位圆中，一个角 α 如果加上整数倍的 360° （即 $k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ ），它的终边会完整地绕圈回到原来的位置。因为三角函数值只取决于终边的位置，所以：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

用弧度制， 360° 等于 2π ，公式变成：

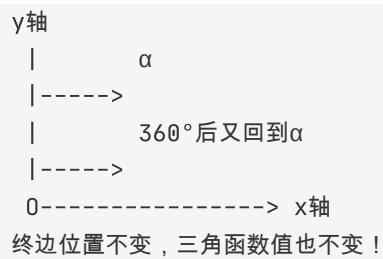
$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

推导过程

1. 单位圆上， $\sin \alpha$ 是终边的 y 坐标， $\cos \alpha$ 是 x 坐标。
2. 转一圈 360° （或 2π ），终边回到原点， x 和 y 不变。
3. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，分子分母不变，值也一样。
4. 多转几圈（ k 次），结果依然如此。

图解

纯文本



示例

求 $\sin 420^\circ$:

- $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ \quad (k = 1),$
- $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

小贴士：默认 α 是锐角 (0° 到 90°)，方便后续符号判断。

人话版

直白解释

这公式就是告诉你：角转圈圈没啥用！转 360° 就像你绕着操场跑了一圈，气喘吁吁回到起点，位置没变。三角函数也懒得变， \sin 、 \cos 、 \tan 还是老样子。转两圈 (720°)、三圈 (1080°)，随便转，值都不改！

生活比喻

想象你坐旋转木马，转了一圈又一圈，风景还是那个风景，心情还是那个心情，三角函数也是这么“固执”。

示例拆解

拿 $\sin 420^\circ$ 举例：

- 420° 比 360° 多 60° ，就像你跑了一圈还多跑了 60 米，
- 多跑的那圈没用，直接看 60° ， $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，搞定！

吐槽时间

这公式也太懒了吧，转了半天啥也没变，数学家发明它就是为了偷懒吗？不过对我们来说，真是省心又省力！

知识点 2：负角的“反向操作” $-\alpha$

官方版

核心概念

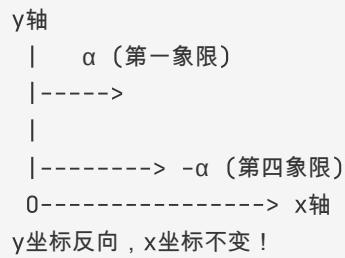
把角 α 变成 $-\alpha$ ，终边会绕着原点逆时针变成顺时针对称，影响三角函数值：

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

推导过程

1. 在单位圆中, $\sin \alpha$ 是 y 坐标, α 在第一象限时 y 为正, $-\alpha$ 在第四象限时 y 为负, 所以 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ 。
2. $\cos \alpha$ 是 x 坐标, α 和 $-\alpha$ 的 x 坐标相同 (左右对称), 所以 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ 。
3. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, \sin 变负, \cos 不变, \tan 也变负。

图解



Markdown

示例

求 $\sin(-30^\circ)$:

- $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ 。

人话版

直白解释

负角就是“反着走”! 本来 α 是向上爬 (\sin 正), 现在 $-\alpha$ 向下掉 (\sin 负), 但左右位置 (\cos) 没变, \tan 跟着 \sin 一起翻脸。

生活比喻

就像你走路, 本来朝前 (正方向), 现在倒着退 (负方向), 高度变了 (上变下), 但左右还是那个左右。

示例拆解

$\sin(-30^\circ)$:

- 30° 的正弦是 $\frac{1}{2}$, 反过来就是 $-\frac{1}{2}$, 简单粗暴!
- $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 懒得变!
- $\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 跟着翻。

搞笑版

\sin 是胆小鬼, 一反向就吓得变负, \cos 是硬汉, 死活不改, \tan 就是墙头草, 见风使舵!

知识点 3: 180° 的“镜像魔法” $180^\circ - \alpha$ 和 $180^\circ + \alpha$

官方版

$180^\circ - \alpha$

终边翻到第二象限：

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

推导

1. $\sin(180^\circ - \alpha)$ ：y 坐标与 $\sin \alpha$ 相同（第二象限 y 仍正）。
2. $\cos(180^\circ - \alpha)$ ：x 坐标反向（第二象限 x 负）。
3. $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ， 符号变负。

$180^\circ + \alpha$

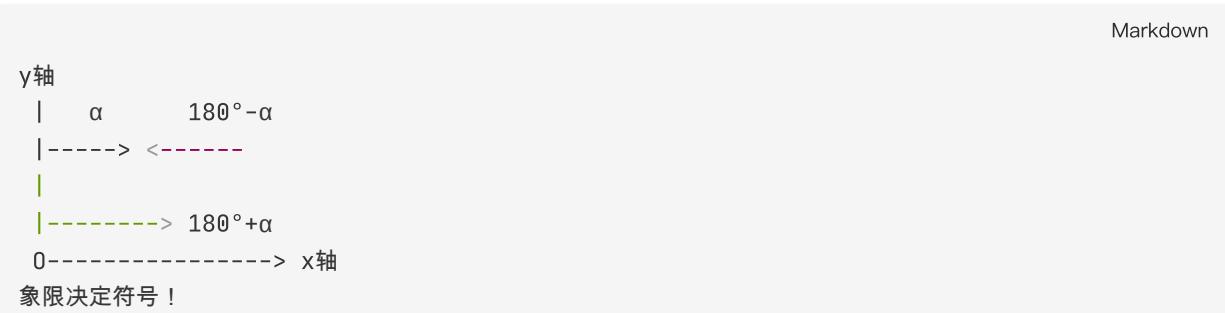
终边翻到第三象限：

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

推导

1. $\sin(180^\circ + \alpha)$ ：y 坐标反向（第三象限 y 负）。
2. $\cos(180^\circ + \alpha)$ ：x 坐标反向（第三象限 x 负）。
3. \tan ：分子分母同负，抵消变正。

图解



示例

- $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,
- $\cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

人话版

$180^\circ - \alpha$

这就像对着镜子翻，高度（sin）没变，但左右（cos）反了，tan 跟着变负。

比喻：你挥右手，镜子里是左手，姿势一样但方向相反。

$180^\circ + \alpha$

再翻一下到第三象限，高度和左右全反，sin 和 cos 都变负，tan 却“厚脸皮”地变回来了。

比喻：你跳到对面，上下左右全变，唯独态度（tan）还是那么倔！

示例拆解

- $\sin 150^\circ : 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, sin 不变, $\frac{1}{2}$ 。
- $\cos 225^\circ : 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$, cos 变负, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

吐槽版

这角翻来翻去跟杂技团似的，tan 还挺会随机应变，真是“见人说人话，见鬼说鬼话”！

知识点 4： 90° 的“角色互换” $90^\circ \pm \alpha$

官方版

核心公式

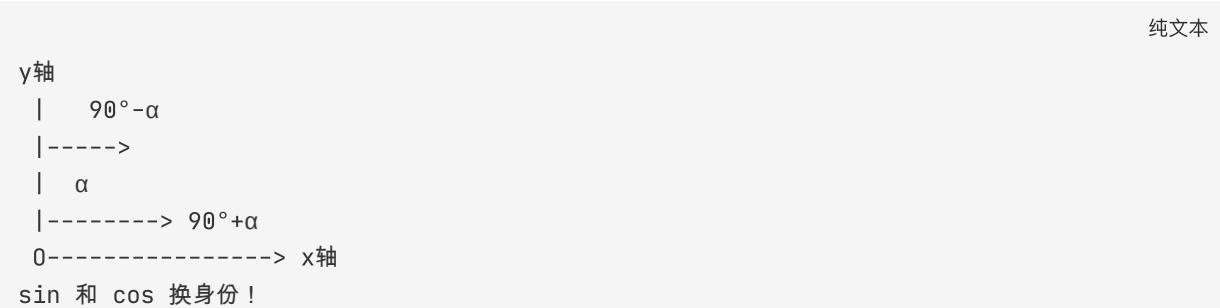
$$\begin{aligned}\sin(90^\circ \pm \alpha) &= \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha.\end{aligned}$$

- $90^\circ + \alpha$ (第二象限): $\sin = \cos \alpha$, $\cos = -\sin \alpha$,
- $90^\circ - \alpha$ (第一象限): $\sin = \cos \alpha$, $\cos = \sin \alpha$.

推导

1. $90^\circ - \alpha$: 终边在第一象限, sin 变 cos, cos 变 sin, 全正。
2. $90^\circ + \alpha$: 终边在第二象限, cos 变负。

图解



示例

- $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

人话版

直白解释

这就像 \sin 和 \cos 玩“变装游戏”！ \sin 穿 \cos 的衣服， \cos 穿 \sin 的衣服， $90^\circ - \alpha$ 全正， $90^\circ + \alpha$ 的 \cos 变负。

生活比喻

你和朋友互换衣服，你穿他的外套（ \sin 变 \cos ），他穿你的毛帽（ \cos 变 \sin ），但天气冷了（第二象限），他得加个负号保暖。

示例拆解

- $\sin 120^\circ : 120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$, \sin 变 \cos , $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\cos 60^\circ : 60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, \cos 变 \sin , $\frac{1}{2}$.

搞笑版

\sin 和 \cos 互换角色，导演还喊“加点负号增加戏剧性”， \cos 估计心里苦：凭啥老是我变负！

总结表格：诱导公式超级详解

角的变化	\sin	\cos	\tan	象限	规律
$\alpha + k \cdot 360^\circ$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	不变	转圈不改值
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	第四	反向， \sin 变负
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	第二	\cos 变负
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$	第三	全反， \tan 恢复
$90^\circ + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	第二	互换， \cos 负
$90^\circ - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	第一	互换，全正

6.4 答案

以下是重新排版后的数学网课教材练习题，格式更加美观清晰：

数学网课教材练习题

一、选择题

- 计算 $\cos 450^\circ$ 的值是：

- A. 0
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. 若 $\cos(\pi - \beta) = \frac{4}{5}$, 则 $\cos \beta$ 等于:

- A. $\frac{4}{5}$
- B. $-\frac{4}{5}$
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $-\frac{3}{5}$

1. 计算 $\sin 210^\circ \cdot \cos 150^\circ$ 的值是:

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- C. $-\frac{3}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

1. 已知 $\sin(\pi + \theta) < 0$, $\cos(\pi - \theta) > 0$, 则下列结论正确的是:

- A. $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$
- B. $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$
- C. $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$
- D. $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$

二、填空题

1. 计算 $\cos 390^\circ$ 的值是 _____。
2. 若 $\tan 300^\circ = \frac{a}{4}$, 则 a 的值是 _____。
3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$, 且 α 为第二象限角, 则 $\tan \alpha$ 的值为 _____。
4. 若 $\sin(\pi + \gamma) < 0$, 且 $\cos(2\pi - \gamma) < 0$, 则 γ 是第 _____ 象限角。
5. 已知 $\sin(90^\circ + \delta) = \frac{1}{3}$, 且 δ 为锐角, 则 $\cos(270^\circ - \delta)$ 等于 _____。

三、解答题

1. 求值: $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ 。
2. 在 $\triangle PQR$ 中, 已知 $\sin Q = \frac{3}{4}$, 求 $\sin(\pi - Q)$ 。
3. 若 $\tan(2\pi - \varphi) < 0$, 则角 φ 是第 _____ 象限角。
4. 计算: $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ 的值是 _____。

答案

一、选择题

1. A
2. B
3. D
4. B

二、填空题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $-4\sqrt{3}$
3. $-\frac{3}{4}$
4. \pm
5. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、解答题

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{3}{4}$
3. 一或三
4. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$