6.7 余弦定理

6.7 余弦定理：解锁三角形的“超级钥匙”

6.7.1 三角形的基础知识与余弦定理

一、三角形的基本规律

官方版

在学习余弦定理之前，我们先来梳理一下三角形的基本性质，这些是解三角形的基础：

1. **内角和**：任意三角形的三个内角相加总是等于 180° 。
2. **边长关系**：三角形中，任意两边的长度之和必须大于第三边，同时两边之差小于第三边。这保证了三角形能“站得住脚”。
3. **边角对应**：在同一个三角形里，较大的边总是对着较大的角；如果两条边相等，对应的两个角也相等，反过来也成立。
4. **外角定理**：三角形的一个外角等于它不相邻的两个内角之和。

人话版

嘿，朋友，三角形可不是随便画几条线就能成的，它有自己的“生存法则”：

1. **内角和**：三个角加起来必须是 180° ，多了少了都不行，不然三角形就得罢工！
2. **边长关系**：两条边加起来比第三条长，两条边差比第三条小。简单说，三角形不能太“瘦”也不能太“胖”，得恰到好处。
3. **边角对应**：大边配大角，小边配小角，就像食堂打饭，多给钱才能多盛菜，一个道理。
4. **外角定理**：外角是个“贪心鬼”，它等于另外两个不相邻的内角之和，觉得自己特别牛。

二、余弦定理：三角形的“万能公式”

官方版

余弦定理是解三角形的重要工具，适用于任何三角形（不管是锐角、直角还是钝角）。在 $\triangle ABC$ 中，设角 A 、B 、C 的对边分别是 a 、b 、c，余弦定理的公式如下：

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

此外，余弦定理还有推论形式，用于求角度：

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

图示说明

以下是一个 $\triangle ABC$ 的示意图，帮助理解边和角的关系：

纯文本

```
A
/\
/  \
/    \
b /      \ c
/         \
/__________\
B      a      C
```

- 角 A 的对边是 a，角 B 的对边是 b，角 C 的对边是 c。
- 余弦定理的核心思想是：一条边的平方等于另外两边平方的和，减去一个与夹角余弦相关的“修正项”。

人话版

余弦定理就是三角形的“超级外挂”，不管三角形长得多奇葩，它都能帮你算出边和角。公式看着有点吓人，其实很简单：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

啥意思？就是说，边 a 的平方等于 $b^2 + c^2$ （有点像勾股定理），但因为三角形不一定是直角，得减去一个“捣乱项” $2bc\cos A$ 。这个捣乱项跟角 A 的余弦有关：

- 角 A 是 90° 时， $\cos A = 0$ ，公式就变成 $a^2 = b^2 + c^2$ ，完美勾股定理！
- 角 A 小于 90° 时， $\cos A > 0$ ，减掉的数变小， a^2 就小一点。
- 角 A 大于 90° 时， $\cos A < 0$ ，减个负数等于加， a^2 就变大。

推论呢？就是反过来用，把 $\cos A$ 拎出来，帮你算角度。简单说，这公式就像个“万能遥控器”，想算啥都行！

三、余弦定理的应用场景

官方版

余弦定理在解三角形时非常灵活，主要解决以下几种问题：

1. **已知两边及其夹角，求第三边**：用公式直接代入计算。
2. **已知三边，求角度**：用推论形式计算 $\cos A$ 、 $\cos B$ 、 $\cos C$ 。
3. **判断三角形类型**：通过计算角度，判断是锐角、直角还是钝角三角形。
4. **已知两边及一个对角，求第三边**：结合公式建立方程求解。

人话版

余弦定理是个“万金油”，啥都能干：

1. **两边夹个角，求第三边**：直接套公式，算出来就完事。
2. **三边都给你，求角度**：用推论版，算出 $\cos$ 值，再查表或者用计算器搞定。
3. **看看三角形啥性格**：算出角度后， 90° 的是直角，小于 90° 全是锐角，有大于 90° 的就是钝角，三角形脾气一目了然。
4. **两边加个角，求剩下那条边**：公式搬出来，变成方程，解个 x ，轻松搞定。

举个例子

已知 $\triangle ABC$ 中， $b = 3$ 、 $c = 4$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 。求 a 。

- 套公式： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- 代入： $a^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$
- 计算： $a^2 = 9 + 16 - 24 \cdot 0.5 = 25 - 12 = 13$
- 结果： $a = \sqrt{13}$ 。

人话版补充

这个例子简单得像喝水：两边 3 和 4 ，夹个 60° 。套公式一算， $a^2 = 13$ ，开个方得 $\sqrt{13}$ 。别怕根号，它就是个小怪兽，乖得很！

知识点总结表格

知识点	核心内容	应用场景
三角形内角和	三个内角之和为 180°	检查角度是否合理
三角形边长关系	两边和 $>$ 第三边，两边差 $<$ 第三边	判断三角形能否存在
边角对应关系	大边对大角，等边对等角	分析边角大小关系
外角定理	外角 = 不相邻两内角之和	计算外角或验证内角
余弦定理（求边）	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	已知两边及夹角求第三边
余弦定理（求角）	$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	已知三边求角度
判断三角形类型	根据角度大小判断（锐角、直角、钝角）	三边已知时分析形状

6.7答案

典例精析

例 1

在 $\triangle DEF$ 中，内角 D, E, F 分别对应的边为 d, e, f 。

(1) 已知 $\angle D=135^{\circ}$ 、 $e=3\sqrt{2}$ 、 $f=\sqrt{6}$ ，求边 d 的长度。

(2) 已知 $d=5$ 、 $e=4\sqrt{2}$ 、 $f=3$ ，求 $\angle E$ 的大小。

变式训练 1

在 $\triangle PQR$ 中，内角 P, Q, R 分别对应的边为 p, q, r 。已知 $p=7$ 、 $q=5$ 、 $r=6$ ，求 $\cos P$ 的值。

例 2

在 $\triangle MNP$ 中，内角 M, N, P 分别对应的边为 m, n, p 。已知 $m=2\sqrt{2}$ 、 $n=3$ 、 $p=\sqrt{7}$ ，判断该三角形的形状（锐角、直角或钝角）。

变式训练 2

在 $\triangle XYZ$ 中，内角 X, Y, Z 分别对应的边为 x, y, z 。已知 $\angle X+\angle Y=45^{\circ}$ 。

(1) 求 $\sin X \cos Y+\cos X \sin Y$ 的值。

(2) 若 $x=3$ 、 $y=\sqrt{5}$ ，求 z 的长度。

变式训练 3

在 $\triangle KLM$ 中，内角 K, L, M 成等差数列，且 k, m 是方程 $x^2-10x+24=0$ 的两根，求 l 的值。

例 4

在 $\triangle RST$ 中，内角 R, S, T 分别对应的边为 r, s, t 。已知 $t=\sqrt{10}$ 、 $s=6$ 、 $\cos T=\frac{4}{5}$ ，求 r 的长度。

变式训练 4

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 分别对应的边为 a, b, c 。已知 $b=4$ 、 $c=\sqrt{13}$ 、 $\angle C=30^{\circ}$ ，求 a 的长度。

例 5

如图所示，两辆车从点 O 同时出发，沿夹角为 150° 的方向行驶，车 A 的速度为 2 m/s，车 B 的速度为 3 m/s，5 秒后分别到达点 P 和 Q 。求此时两车之间的距离。

变式训练 5

如图所示，两名运动员从点 S 同时出发，沿夹角为 36° 的方向跑步，运动员 A 的速度为 5 m/s，运动员 B 的速度为 6 m/s，3 秒后分别到达点 T 和 U 。

(1) 求 T 到 U 的距离；

(2) 若 $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$，计算 $\angle TSU$ 的值。

同步精练

一、选择题

1. 在 $\triangle DEF$ 中，已知 $d = 2$、$f = 3$、$\angle E = 45^\circ$，则边 e 的长度为：

A. $\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$

B. $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{5}$

D. 2

1. 在 $\triangle PQR$ 中，已知 $p = 5$、$q = 6$、$r = 4$，则 $\cos R$ 等于：

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

1. 在 $\triangle XYZ$ 中，若 $x^2 + y^2 - z^2 > 0$，则此三角形的形状是：

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 无法判断

1. 在 $\triangle KLM$ 中，k, l, m 成等比数列，公比为 $\sqrt{3}$，则 $\cos M$ 等于：

A. $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. 已知三角形两边长为 3 和 7，所夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，则第三边长为：

A. 4

B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$

D. $\sqrt{28}$

二、填空题

1. 在 $\triangle RST$ 中，已知 $r=5$ 、$s=6$ 、$\angle T=120^\circ$ ，则 $t=$ __ 。
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 成等差数列，且 $a=4$ 、$c=7$ ，则 $b=$ __ 。
3. 在 $\triangle DEF$ 中，已知 $d=3$ 、$e=\sqrt{10}$ 、$f=5$ ，则 $\sin D=$ __ 。

三、解答题

1. 在 $\triangle MNP$ 中，若 $\angle M+\angle P=135^\circ$ ，且 $MN=2$ 、$NP=5$ ，求 MP 的长度。
2. 在 $\triangle XYZ$ 中，内角 X,Y,Z 分别对应的边为 x,y,z 。已知 $x=2$ 、$y=3$ 、$\cos Z=-\frac{1}{3}$ ，求：

(1) 三角形的周长；

(2) $\sin(X+Z)$ 的值。

答案版

同步精练答案

一、选择题

1. A
2. C
3. D
4. A
5. B

二、填空题

1. $\sqrt{61}$
2. $\sqrt{37}$
3. $\frac{3\sqrt{10}}{25}$

三、解答题

1. $MP=\sqrt{13}$
2. (1) 周长为 $5+\sqrt{17}$ ；(2) $\sin(X+Z)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$