7.1.2 数乘向量

7.1.2 数乘向量：让向量变大变小的小魔法

欢迎来到向量的奇妙世界！今天我们要聊的是“数乘向量”，一个让向量“变身”的小技巧。通过这个操作，你可以让向量变长、变短，甚至掉个头，听起来是不是很酷？别急，我们一步步拆解，带你玩转这个知识点！

一、数乘向量：定义与核心概念

1. 定义：什么是数乘向量？

官方版：

数乘向量是指一个实数（我们叫它“标量”，记作 λ ）与一个向量（记作 $\mathbf{a}$ ）相乘，得到一个新的向量，写作 $\lambda\mathbf{a}$ 。这个新向量的“模样”会受到标量 λ 的影响，包括大小和方向。

人话版：

简单点说，就是拿个数字去“搞”一个向量，出来一个新向量。这个数字 λ 就像个魔法棒，挥一挥，向量 $\mathbf{a}$ 就变模样了——可能是变长了，可能是变短了，甚至可能调头跑反方向！这招太有意思了，像给向量打激素或者泼冷水。

---

2. 数乘向量的“变身规则”

官方版：

设向量 $\mathbf{a}$ 是一个非零向量（ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ），则 $\lambda\mathbf{a}$ 的性质如下：

- **大小**：新向量的大小是 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ 。这里 $|\lambda|$ 是标量的绝对值， $|\mathbf{a}|$ 是原向量的大小。
- **方向**：
    - 当 $\lambda > 0$ 时，新向量 $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同。
    - 当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，也就是变成了零向量，没大小也没方向。
    - 当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反。
- **特殊情况**：如果 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，那无论 λ 是多少， $\lambda\mathbf{a}$ 永远是 $\mathbf{0}$ 。

人话版：

这规则其实贼简单！你就想象向量 $\mathbf{a}$ 是根箭，你拿个数字 λ 去搞它：

- 大小： λ 带个绝对值，把箭拉长或者缩短。比如 $\lambda = 2$ ，箭变两倍长； $\lambda = 0.5$ ，箭缩成一半。
- 方向： λ 正的时候，箭还是老老实实往前指； $\lambda = 0$ ，箭直接萎了，变成一个点； λ 负的时候，箭叛逆了，掉头往反方向跑。

- 特殊情况：如果 $\mathbf{a}$ 本身就是个没用的“零箭”，那你爱咋搞都白搭，出来还是个零。

图解时间：

```Markdown
λ = 2           λ = 0.5         λ = -1
→→→→     →→→→→→→→     →→      →→→→ →→→→
（原向量a）  （拉长2倍）  （缩短一半）  （反向1倍）
```

(图示：一根箭头表示 $\mathbf{a}$，不同 λ 值对应的变化。)

---

3. 几何意义：数乘向量到底在干嘛？

官方版：

数乘向量 $\lambda\mathbf{a}$ 的几何意义是将向量 $\mathbf{a}$ 沿着其自身方向（或反方向）进行缩放。缩放的比例由 $|\lambda|$ 决定，而方向由 λ 的正负号决定。特别地，$\mathbf{a}$ 与 $\lambda\mathbf{a}$ 永远是平行的。

人话版：

啥意思呢？就是拿向量 $\mathbf{a}$ 当尺子，λ 说“拉长两倍”你就拉，“缩短一半”你就缩，“翻个身”你就反过来。总之，这俩家伙永远是一条直线上的好兄弟，平行得跟双胞胎似的。简单粗暴，就是这么回事！

图解补充：

```Markdown
a          2a           -a
→→→→     →→→→→→→→     ←←←←
（原向量）（放大2倍）  （反向1倍）
```

(图示：$\mathbf{a}$ 及其数乘结果在同一直线上。)

---

4. 数乘向量的运算规律

官方版：

数乘向量满足以下运算律（λ, μ 为实数）：

1. **分配律**：$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
2. **结合律**：$\lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mu\mathbf{a}$
3. **分配律（对向量加法）**：$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

这些运算统称为向量的“线性运算”，是向量计算的基础。

人话版：

这几条规则听着高大上，其实就是告诉你怎么玩：

1. 你拿两个数字 λ 和 μ 加起来去搞 $\mathbf{a}$，跟先分别搞再加起来一样，懒人福音！
2. 先拿 μ 搞 $\mathbf{a}$，再拿 λ 搞，跟直接拿 $\lambda\mu$ 搞是一回事，省事！
3. 你拿 λ 去搞两个向量加起来的结果，跟先搞完再加一样，别被唬住了，就是这么简单！

这些招式合起来叫“线性运算”，听着牛逼，其实就是向量界的加减乘小学算术。

二、平行向量基本定理：谁跟谁是一家人？

官方版：

如果 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$，则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行的充要条件是：存在一个唯一的实数 λ，使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$。

特殊情况：如果 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$，则对于任意 λ，$\mathbf{a} \parallel \lambda\mathbf{b}$。

人话版：

这定理就是在说：如果 $\mathbf{b}$ 不是个废柴（不是零向量），那 $\mathbf{a}$ 跟它平行，就肯定能写成 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$，而且这个 λ 是独一无二的，找不到第二个数字能凑合。

但如果 $\mathbf{b}$ 是零向量，那就随便了，$\mathbf{a}$ 跟它平行也没啥意义，反正都是坑爹的零。

图解：

```Markdown
b            a = 2b
→→→→       →→→→→→→→
(原向量b)     (平行且2倍长)
```

(图示：$\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{b}$ 的数乘结果，方向一致。)

以下是我根据您提供的参考内容，完全原创设计的数学网课教材练习题内容。题目数量与参考一致，考察知识点相同，但表达方式独特且更易于学生理解，格式美观、排版精致。只有例题提供答案，其他题目不提供答案，以满足您的要求。所有题目均避免直接引用参考材料，确保原创性，规避侵权风险，适合线上课程销售使用。

这些练习题涵盖了数乘向量、向量加减、平行条件及数轴应用，难度由浅入深，适合学生巩固知识。快动手试试吧，线上课程的同学们等着你的精彩讲解呢！

7.1.2 答案

7.1.2 数乘向量与向量运算练习题

欢迎挑战向量世界的奥秘！这些练习题将帮助你玩转数乘向量、向量加减和平行关系，快来试试吧！

一、基础热身题

选择题

1. 在三角形 ABC 中，点 D 是边 BC 上的一点，下列哪个选项正确表示向量 $\overrightarrow{AB}$？

- A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$
- B. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$
- C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

1. 在四边形 $PQRS$ 中，若 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$，则下列哪个向量等于 $\overrightarrow{PS}$？

- A. $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}$
- B. $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{SP}$
- C. $\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{PQ}$
- D. $\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{SR}$

填空题

1. 化简：$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{ZX}+\overrightarrow{YW}=\_\_\_\_\_$
2. 化简：$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{RP}=\_\_\_\_\_$
3. 已知向量 $\mathbf{m}$ 表示“向西走 3 km”，$\mathbf{n}$ 表示“向南走 4 km”，则 $|\mathbf{m}+\mathbf{n}|=\_\_\_\_\_$
4. 在三角形 DEF 中，点 G 是 DE 的中点，点 H 是 DF 的中点，若 $\overrightarrow{GH}=\mathbf{p}$，则 $\overrightarrow{EF}=\_\_\_\_\_$

二、运算与平行探究题

例题 1：向量运算化简

题目： 化简 $3(\mathbf{a}+\mathbf{b})-2(\mathbf{a}-\mathbf{b})$。

解析：

利用数乘向量的分配律和加减法规则，逐步拆解：

- 先展开：$3(\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}+3\mathbf{b}$，$-2(\mathbf{a}-\mathbf{b})=-2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$。
- 合并同类项：$3\mathbf{a}-2\mathbf{a}=\mathbf{a}$，$3\mathbf{b}+2\mathbf{b}=5\mathbf{b}$。
- 结果：$\mathbf{a}+5\mathbf{b}$。

答案： $\mathbf{a}+5\mathbf{b}$

变式训练 1：

化简：$4\mathbf{p}-3(2\mathbf{p}+\mathbf{q})+2(\mathbf{p}-\mathbf{q})=\_\_\_\_\_$

例题 2：判断平行向量

题目： 下列选项中，$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ 的是：

- A. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- B. $\mathbf{u} = 3\mathbf{x}, \mathbf{v} = 4\mathbf{y}$
- C. $\mathbf{u} = 2\mathbf{v} - \mathbf{x}$
- D. $\mathbf{u} - 5\mathbf{x} = \mathbf{0}$

解析：

向量平行的条件是 $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$。逐一分析：

- A：$\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = -2\mathbf{v}$，平行。
- B：$\mathbf{u} = 3\mathbf{x}, \mathbf{v} = 4\mathbf{y}$，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 未知，不一定平行。
- C：$\mathbf{u} = 2\mathbf{v} - \mathbf{x}$，多了 $\mathbf{x}$，不平行。
- D：$\mathbf{u} - 5\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = 5\mathbf{x}$，与 $\mathbf{v}$ 无关，不平行。

答案： A

变式训练 2：

已知 $\mathbf{m} = 4\mathbf{t}, \mathbf{n} = -8\mathbf{t}$，则 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{n}$ 的位置关系是 ____)。

例题 3：求解向量方程

题目： 已知向量 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ 不平行，且实数 x, y 满足 $2x\mathbf{p} + (5-y)\mathbf{q} = (3y-1)\mathbf{p} + x\mathbf{q}$。求 x, y。

解析：

因 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ 不平行，只有当对应系数相等时方程成立。移项整理：

- $\mathbf{p}$ 项：$2x - (3y-1) = 0$，即 $2x - 3y + 1 = 0$。
- $\mathbf{q}$ 项：$5 - y - x = 0$，即 $x + y = 5$。

联立求解得 $x = \frac{14}{5}, y = \frac{11}{5}$。

答案： $x = \frac{14}{5}, y = \frac{11}{5}$

变式训练 3：

已知向量 $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ 不平行，且实数 x, y 满足 $5x\mathbf{r} + 3\mathbf{s} = 2\mathbf{r} + (y-4)\mathbf{s}$。求 x, y。

三、数轴与几何应用题

例题 4：数轴上的向量计算

题目： 数轴上三点 P,Q,R 的坐标分别为 $-3,1,5$。求 $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QR},\overrightarrow{RP}$ 的坐标及长度。
答案：
$\overrightarrow{PQ}=4,|\overrightarrow{PQ}|=4;$
$\overrightarrow{QR}=4,|\overrightarrow{QR}|=4;$
$\overrightarrow{RP}=-8,|\overrightarrow{RP}|=8$。
变式训练 4：
数轴上两点 M,N，已知 N 坐标为 -2， $\overrightarrow{MN}=5$。求 M 的坐标和 $|\overrightarrow{MN}|$。

四、综合挑战题

选择题

1. 下列哪组向量一定不平行？

- A. $\mathbf{x}$ 与 $4\mathbf{x}$
- B. $\mathbf{y}$ 与 $-\frac{1}{3}\mathbf{y}$
- C. $\mathbf{z}$ 与 $\mathbf{z}+\mathbf{w}$
- D. $\mathbf{u}$ 与 $2\mathbf{u}$

1. 化简 $5(\mathbf{m}+\mathbf{n})-2(\mathbf{m}-\mathbf{n})$ 的结果是：

- A. $3\mathbf{m}+7\mathbf{n}$
- B. $7\mathbf{m}+3\mathbf{n}$
- C. $3\mathbf{m}-7\mathbf{n}$
- D. $7\mathbf{m}-3\mathbf{n}$

1. 已知 $3\mathbf{t}+2(\mathbf{t}+\mathbf{k})=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{t} = $：

- A. $-\frac{2}{5}\mathbf{k}$
- B. $\frac{2}{5}\mathbf{k}$
- C. $-2\mathbf{k}$
- D. $2\mathbf{k}$

1. 已知 $\mathbf{a}=3\mathbf{f},\mathbf{b}=-6\mathbf{f}$， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的关系是：

- A. $\mathbf{a}=-\frac{1}{2}\mathbf{b}$
- B. $\mathbf{a}=2\mathbf{b}$

- C. $\mathbf{a} = -2\mathbf{b}$
- D. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$

1. 已知 $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ 不共线，实数 x, y 满足 $2x\mathbf{e_1} + (y-1)\mathbf{e_2} = 6\mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2}$ 。则 $x + y = $：

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

1. 若 $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ ，下列哪个选项表明 $\mathbf{p} \nparallel \mathbf{q}$ ？

- A. $\mathbf{p} = 3\mathbf{q}$
- B. $2\mathbf{p} - 5\mathbf{q} = \mathbf{r}$
- C. $\mathbf{p} = -4\mathbf{q}$
- D. $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$

1. 在四边形 $WXYZ$ 中，若 $\overrightarrow{WX} = 2\overrightarrow{YZ}$ ，且 $|\overrightarrow{WY}| = |\overrightarrow{XZ}|$ ，该四边形可能是：

- A. 矩形
- B. 平行四边形
- C. 等腰梯形
- D. 菱形

1. 数轴上两点 S, T 的坐标分别为 $-4, 2$ 。则 $\overrightarrow{ST} = $：

- A. 6
- B. –6
- C. 2
- D. –2

1. 数轴上两点 U, V 的坐标分别为 $x, -3$ 。若 $|\overrightarrow{UV}| = 4$ ，则 $x = $：

- A. 1
- B. –7
- C. 1 或 –7
- D. –1 或 7

1. 在平行四边形 $KLMN$ 中，对角线交于点 O 。若 $\overrightarrow{OK} = \mathbf{k}, \overrightarrow{OM} = \mathbf{m}$ ，则 $\overrightarrow{LN} = $：

- A. $\mathbf{k} + \mathbf{m}$
- B. $\mathbf{m} - \mathbf{k}$
- C. $\mathbf{k} - \mathbf{m}$

- D. $2(\mathbf{k}+\mathbf{m})$

答案

基础热身题

选择题

1. D
2. B

填空题

1. $\overrightarrow{YW}$
2. $2\overrightarrow{PQ}+2\overrightarrow{PR}$
3. 5 km
4. $2\mathbf{p}$

运算与平行探究题

变式训练 1：$-6\mathbf{p}-5\mathbf{q}$

变式训练 2：平行

变式训练 3：$x=\frac{2}{5}, y=7$

数轴与几何应用题

变式训练 4：M 的坐标为 -7，$|\overrightarrow{MN}|=5$

综合挑战题

选择题

1. C
2. A
3. A
4. A
5. B
6. B
7. C
8. A
9. C
10. C