7.2 平面向量的直角坐标及其运算

第7章 平面向量的直角坐标与运算

7.2 平面向量的直角坐标及其运算

欢迎来到平面向量的坐标世界！这一节我们将一起探索如何用坐标来表示向量，并学会对它们进行加减乘除等操作。准备好了吗？让我们开始这场数学冒险吧！

一、什么是平面向量的直角坐标？

官方版讲解

在平面直角坐标系中，我们可以用两个特殊的向量来表示任何向量。这两个特殊向量分别是：

- $\mathbf{e}_1$：沿着 x 轴正方向的单位向量，长度为1。
- $\mathbf{e}_2$：沿着 y 轴正方向的单位向量，长度同样为1。

假设有一个向量 $\overrightarrow{PQ}$，可以用 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 的组合来表示：

$$\overrightarrow{PQ} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

这里的 x 和 y 就是 $\overrightarrow{PQ}$ 的"直角坐标"，我们干脆直接记作：

$$\overrightarrow{PQ} = (x, y)$$

简单来说，向量的直角坐标就是它在 x 方向和 y 方向的分量，用一个有序数对 (x, y) 表示。

插图示例
（想象一个坐标系，$\mathbf{e}_1$ 是横向箭头，$\mathbf{e}_2$ 是纵向箭头，$\overrightarrow{PQ}$ 被分解为两个分量。）

人话版讲解

好，官方版听起来是不是有点像在念经？别慌，咱用大白话讲一遍：
向量这东西，就像你在地图上指路。你要告诉别人怎么从点 P 走到点 Q，最简单的方法就是说："先往右走 x 步，再往上走 y 步。"这 x 和 y 就是向量的坐标！
想象 $\mathbf{e}_1$ 是你的"右脚侠"，专门管左右移动；$\mathbf{e}_2$ 是"上梯侠"，负责上下爬升。随便一个向量 $\overrightarrow{PQ}$，都可以拆成"右脚侠走几步"加上"上梯侠爬几步"。这不就成了 (x, y) 吗？简单粗暴，学不会我跟你姓！

二、向量坐标和点坐标的奇妙关系

官方版讲解

假设有两个点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$，向量 $\overrightarrow{PQ}$ 表示从 P 到 Q 的有向线段。它的坐标可以通过两点坐标计算：

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

这意味着，向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标。

举例
已知 $P(2, 3)$，$Q(5, 7)$，则：

$$\overrightarrow{PQ} = (5 - 2, 7 - 3) = (3, 4)$$

人话版讲解

这部分简单得像抢糖吃！

假设你在玩射击游戏，P 是你现在站的地方，Q 是敌人藏身的位置。向量 $\overrightarrow{PQ}$ 就是你瞄准的方向。怎么算？直接用敌人的坐标 (x_2, y_2) 减去你的坐标 (x_1, y_1)，得出“横着挪多少，竖着跳多少”。

比如 $P(2,3)$ 到 $Q(5,7)$，横着挪 $5-2=3$，竖着跳 $7-3=4$，坐标就是 $(3,4)$。这不比脑筋急转弯还容易？算错了你就是个憨憨！

三、向量的加减法和数乘运算

官方版讲解

设有两个向量 $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$ 和 $\mathbf{b}=(x_2, y_2)$，以及一个实数 λ。它们的运算规则如下：

1. **加法**：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
   两个向量的分量分别相加。
2. **减法**：$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$
   两个向量的分量分别相减。
3. **数乘**：$\lambda\mathbf{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$
   向量每个分量乘以同一个数 λ，表示长度或方向的缩放。

举例

$\mathbf{a}=(2,3)$，$\mathbf{b}=(1,-4)$，$\lambda=2$，则：

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2+1, 3+(-4))=(3,-1)$
- $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(2-1, 3-(-4))=(1,7)$
- $2\mathbf{a}=(2\times 2, 2\times 3)=(4,6)$

人话版讲解

加减法和数乘就是向量的“搬砖”操作，简单得像玩积木！

- **加法**：把两个向量的横坐标加起来，纵坐标加起来，像叠汉堡一样。
- **减法**：横坐标减一减，纵坐标减一减，像是抢了对方的汉堡。
- **数乘**：直接把向量放大缩小，像是在健身房里给向量喂蛋白粉。
  例子里 $\mathbf{a}=(2,3)$ 和 $\mathbf{b}=(1,-4)$，加起来就是 $(3,-1)$，减掉就是 $(1,7)$，翻倍就是 $(4,6)$。
  这要是还不会，你就别混数学圈了，回家种田去吧！

插图示例

（画两个箭头 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，用平行四边形法合成一个新箭头。）

四、平行与垂直的秘密

官方版讲解

设 $\mathbf{a}=(x_1, y_1)$，$\mathbf{b}=(x_2, y_2)$，则：

1. **平行条件**：$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ 当且仅当存在实数 $k\neq 0$，使得 $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$。用坐标表示为：

$$x_1y_2-x_2y_1=0 \quad \text{或} \quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2} \quad (x_2\neq 0, y_2\neq 0)$$

2. **垂直条件**：$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 当且仅当它们的数量积为零：

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

举例

$\mathbf{a} = (2,4)$，$\mathbf{b} = (1,2)$，则 $2 \times 2 - 1 \times 4 = 4 - 4 = 0$，$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$。

$\mathbf{a} = (3,4)$，$\mathbf{b} = (-4,3)$，则 $3 \times (-4) + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$，$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$。

人话版讲解

平行和垂直就是向量的“感情状态”：

- **平行**：两个向量方向一致，像情侣手牵手。你把它们的坐标交叉一乘再减，得出0就说明它们是一对儿。比如 $(2,4)$ 和 $(1,2)$，算算 $2 \times 2 - 1 \times 4 = 0$，完美贴合！
- **垂直**：两个向量互相看不顺眼，成90度角。横坐标乘横坐标，纵坐标乘纵坐标，加起来等于0就说明它们“掰了”。比如 $(3,4)$ 和 $(-4,3)$，$3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0$，妥妥的垂直！
  不会算你就别学了，回家当单身狗吧！

五、中点、长度与距离公式

官方版讲解

1. **中点坐标**
   已知两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$，线段 PQ 中点 M 的坐标为：
   $$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
2. **向量长度**
   若 $\mathbf{a} = (x, y)$，则长度公式为：
   $$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
3. **两点间距离**
   两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 的距离为：
   $$d_{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

举例

$P(1,2)$，$Q(5,8)$，则中点 $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (3,5)$，距离 $d_{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$。

人话版讲解

这部分就是“量尺寸”的活儿：

- **中点**：把两个点的横坐标加起来除以2，纵坐标加起来除以2，像是在找两个懒鬼的中间碰头点。
- **长度**：向量坐标平方和开根号，像用尺子量箭头长短。
- **距离**：终点减起点，平方和开根号，跟量你家到超市有多远一个道理。
  比如 $P(1,2)$ 到 $Q(5,8)$，中点 $(3,5)$，距离 $2\sqrt{13}$。这要是还不会，你就别出门了，宅着吧！

插图示例

（画一个坐标系，标注 P、Q 和中点 M。）

知识点总结表格

知识点	核心公式/条件	一句话概括

向量直角坐标	$\overrightarrow{PQ} = (x, y)$	用 (x, y) 表示方向和大小	
点坐标与向量关系	$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$	终点减起点得出向量坐标	
向量加法	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$	分量分别相加	
向量减法	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$	分量分别相减	
向量数乘	$\lambda\mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$	每个分量乘以同一个数	
平行条件	$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$	交叉乘减为0	
垂直条件	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$	分量乘积和为0	
中点坐标	$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	横纵坐标平均值	
向量长度	(	\mathbf{a}	= \
两点距离	$d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	向量长度公式	

这份教材内容完全原创，详细易懂且有趣，配有插图提示（实际生成需要您确认是否需要图像）。如果您满意，可以继续调整或补充其他章节！有什么意见尽管提，我再给您优化！

以下是我根据您提供的参考内容，重新设计的全新数学网课教材练习题。所有题目均为原创，避免直接引用或复制参考材料，确保无侵权风险。题目考察的知识点与参考一致，但表达方式独特、更易理解，格式美观，数量也与参考保持一致。只有例题提供答案，其他练习题不附答案。

典例精析

例 1 在平面直角坐标系中，设原点为 O，点 P(–3, 2)，点 Q(1, –1)。求向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标和向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标。

【解析】

本题考查向量的坐标表示。向量的坐标由终点坐标减去起点坐标计算：

- $\overrightarrow{OP}$ 的起点为 O(0, 0)，终点为 P(–3, 2)，故 $\overrightarrow{OP} = (-3, 2)$ 。
- $\overrightarrow{PQ}$ 的起点为 P(–3, 2)，终点为 Q(1, –1)，故 $\overrightarrow{PQ} = (1 - (-3), -1 - 2) = (4, -3)$ 。

答案： $\overrightarrow{OP} = (-3, 2)$ ， $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$ 。

例 2 已知点 S(2, –1)，点 T(–1, 3)，求线段 ST 的中点 N 的坐标。

【解析】

本题考查中点坐标计算。中点坐标公式为 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ ， $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ 。

设 N 的坐标为 (x, y)，则：

- $x = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$，
- $y = \frac{-1+3}{2} = 1$。

故 N 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$。

答案： N $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$。

例 3 已知向量 $\overrightarrow{PQ} = (2, -1)$，$\overrightarrow{PR} = (3, 4)$，求：

(1) $|\overrightarrow{RQ}|$；

(2) 若点 P(1, −2)，点 R(−2, 5)，求 $|\overrightarrow{PR}|$。

【解析】

本题考查向量长度计算，公式为 $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$。

(1) $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = (2, -1) - (3, 4) = (-1, -5)$，

则 $|\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$。

(2) $\overrightarrow{PR} = (-2 - 1, 5 - (-2)) = (-3, 7)$，

则 $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$。

答案：

(1) $\sqrt{26}$；

(2) $\sqrt{58}$。

例 4 已知向量 $u = (3, -2)$，$v = (-1, 5)$，求：

(1) $u + v$；

(2) $|3u - 2v|$。

【解析】

本题考查向量运算。

(1) $u + v = (3, -2) + (-1, 5) = (3 - 1, -2 + 5) = (2, 3)$。

(2) $3u - 2v = 3(3, -2) - 2(-1, 5) = (9, -6) - (-2, 10) = (9 + 2, -6 - 10) = (11, -16)$，

则 $|3u - 2v| = \sqrt{11^2 + (-16)^2} = \sqrt{121 + 256} = \sqrt{377}$。

答案：

(1) $(2, 3)$；

(2) $\sqrt{377}$。

变式训练

1. 已知点 P(1, –3)，向量 $\overrightarrow{PQ} = (-4, 2)$ ，求点 Q 的坐标。

选择题

1. 在坐标系中，点 M(–3, 2)，点 N(4, –1)，则 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标为：
    - A. (7, –3)
    - B. (–7, 3)
    - C. (1, –1)
    - D. (–1, 1)
2. 已知点 K(–1, 4)，向量 $\overrightarrow{KL} = (5, -2)$ ，则点 L 的坐标为：
    - A. (4, 2)
    - B. (6, –2)
    - C. (–6, 6)
    - D. (4, –6)
3. 若向量 $p = (4, -1)$ ， $q = (-2, 3)$ ，且 $2p + q - r = 0$ ，则 r 等于：
    - A. (6, –5)
    - B. (10, 1)
    - C. (–6, 5)
    - D. (6, 1)
4. 已知点 X(2, –1)，Y(–3, 2)，Z(1, 5)，则 $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$ 等于：
    - A. (–2, 6)
    - B. (4, –3)
    - C. (–4, 3)
    - D. (2, –6)
5. 已知点 E(0, –2)，F(3, 1)，向量 $w = (t, 3)$ ，且 $\overrightarrow{EF} \cdot w = 0$ ，则 t 等于：
    - A. –3
    - B. 1
    - C. –1
    - D. 3
6. 已知向量 $m = (k, \sin 30^\circ)$ ， $n = (2, \cos 30^\circ)$ ，且 $m \perp n$ ，则 k 等于：
    - A. $-\sqrt{3}$
    - B. $\sqrt{3}$

- C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知向量 $\overrightarrow{ST} = (2, -1)$，$\overrightarrow{TU} = (-3, 4)$，则 $|\overrightarrow{SU}|$ 等于：
   - A. $\sqrt{10}$
   - B. 5
   - C. $\sqrt{13}$
   - D. 10
8. 已知点 P(3, −1)，Q(−2, 4)，R(x, −6)，且 P、Q、R 三点共线，则 x 等于：
   - A. 6
   - B. −7
   - C. 7
   - D. −6
9. 已知点 A(1, −2)，B(x, 4)，且 $|\overrightarrow{AB}| = 10$，则 x 等于：
   - A. 11
   - B. −9
   - C. 11 或 −9
   - D. 9 或 −11
10. 已知点 C(−1, 3)，D(2, −1)，则 $|\overrightarrow{CD}|$ 等于：
    - A. 5
    - B. $\sqrt{7}$
    - C. $\sqrt{13}$
    - D. 7
11. 已知向量 $s = (2, -3)$，$t = (-1, 4)$，则 $|s - t|$ 等于：
    - A. $\sqrt{10}$
    - B. $\sqrt{17}$
    - C. 5
    - D. 3

填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (4, -1)$，$\overrightarrow{OB} = (-2, 3)$，则 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 等于 ________。
2. 已知点 M(−2, 1)，N(1, −3)，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 等于 ________。

3. 已知向量 $\overrightarrow{XY} = (2, -5)$，$\overrightarrow{PQ} = (3, k)$，且 $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{PQ}$，则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 等于 ________。

以上内容均为原创设计，题目数量与参考一致，格式清晰美观，知识点覆盖向量坐标、运算、长度、中点及垂直性等，适合学生理解与练习。希望对您的网课教材开发有所帮助！如需调整，请随时告知。

7.2 答案

直接答案版

典例精析

1. $\overrightarrow{OP} = (-3, 2)$，$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$
2. N $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
3. (1) $\sqrt{26}$；(2) $\sqrt{58}$
4. (1) $(2, 3)$；(2) $\sqrt{377}$

变式训练

1. Q $(-3, -1)$

选择题

1. A. (7, –3)
2. A. (4, 2)
3. A. (6, –5)
4. A. (–2, 6)
5. C. –1
6. A. $-\sqrt{3}$
7. A. $\sqrt{10}$
8. C. 7
9. C. 11 或 –9
10. A. 5
11. A. $\sqrt{10}$

填空题

1. $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$
2. 5
3. $\sqrt{61}$